

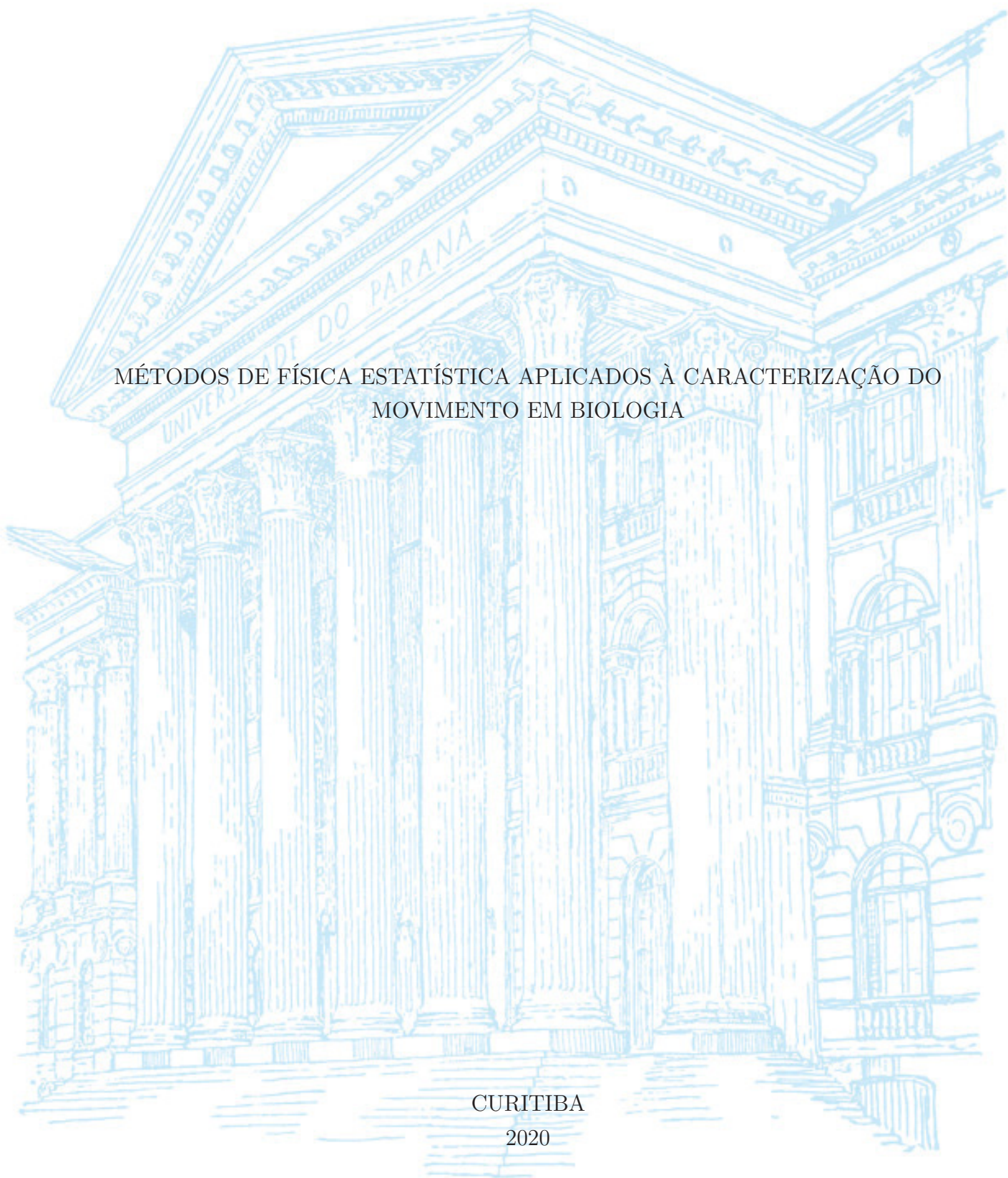
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

FLAVIO ROBERTO RUSCH

MÉTODOS DE FÍSICA ESTATÍSTICA APLICADOS À CARACTERIZAÇÃO DO
MOVIMENTO EM BIOLOGIA

CURITIBA

2020



FLAVIO ROBERTO RUSCH

MÉTODOS DE FÍSICA ESTATÍSTICA APLICADOS À CARACTERIZAÇÃO DO
MOVIMENTO EM BIOLOGIA

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação
em Física, Setor de Ciências Exatas da Uni-
versidade Federal do Paraná, como requisito
parcial à obtenção do título de Doutor em
Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Gomes Eleutério da Luz

Coorientadora: Dra. Marina Elaine Wosniack

CURITIBA

2020

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

R951m Rusch, Flavio Roberto
 Métodos de Física estatística aplicados à caracterização do movimento em Biologia
 [recurso eletrônico] Flavio Roberto Rusch. – Curitiba, 2020.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2020.

Orientador: Marcos Gomes Eleutério da Luz.
Coorientadora: Marina Elaine Wosniack.

I. Física estatística. 2. Mecânica estatística. 3. Biologia. I. Universidade Federal do Paraná.
II Luz, Marcos Gomes Eleutério da. III. Wosniack, Marina Elaine. IV. Título

CDD: 530.13

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1978



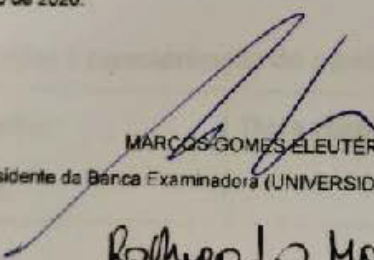
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO FÍSICA - 40001016020P4

TERMO DE APROVAÇÃO

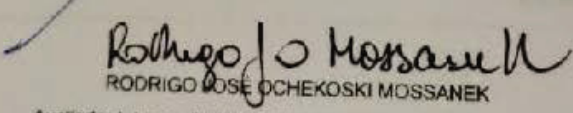
Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **FLÁVIO ROBERTO RUSCH** intitulada: **"Métodos de Física Estatística Aplicados à Caracterização de Movimento em Biologia"**, sob orientação do Prof. Dr. **MARCOS GOMES ELEUTÉRIO DA LUZ**, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

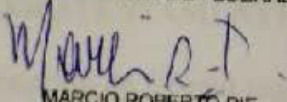
CURITIBA, 28 de Fevereiro de 2020.


MARCOS GOMES ELEUTÉRIO DA LUZ

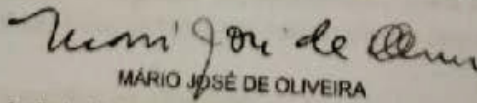
Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)


RODRIGO JOSÉ OCCHKOSKI MOSSANEK

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)


MARCIO ROBERTO PIE

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)


MÁRIO JOSÉ DE OLIVEIRA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

Dedicado a todos(as) aqueles(as) que, a postos no início do caminho e vislumbrando o longo trajeto a percorrer no desenvolvimento de si mesmos, fitam o horizonte, consideram e compreendem as dificuldades do caminho e, mesmo assim, decidem percorrê-lo.

AGRADECIMENTOS

À inteligência suprema, causa primeira de todas as coisas, pela saúde física e mental que constituíram a base de todos esses anos de trabalho. Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcos Gomes Eleutério da Luz por ter aceitado orientar este trabalho. Por acreditar nas minhas capacidades, pela sua paciência ante as minhas dificuldades, pelo exemplo ético na pesquisa científica enfim, por tudo! À Marina Elaine Wosniack, minha coorientadora, pelas discussões e assistências dadas ao longo desses anos.

À minha família na figura de meu irmão Fábio, minha esposa Jaqueline e minha mãe Lúcia por todo amor, apoio e compreensão que me dispensaram sobretudo nos momentos mais difíceis. Ao amigo Eduardo Brugnago pelas ideias, discussões e auxílios que contribuíram para o aprofundamento, riqueza e robustez deste trabalho. Ao Prof. Dr. Rafael Marques da Silva, amigo de longa data, também por suas ideias e contribuições à esta tese.

Ao professor Dr. Marcio Henrique Franco Bettega, coordenador do programa de pós graduação em física da UFPR, pelo justo esmero e dedicação aos alunos e pelo seu exemplo ético como servidor público. Aos professores Dr. Gilberto Kremer, Dr. Renato M. Angelo e Dr. Ricardo Viana não só pelas disciplinas ministradas mas também pelo exemplo que deram como catedráticos. Ao Prof. Dr. Carlos Carvalho pelo suporte computacional e por fim, mas não menos importante, à CAPES pelo apoio financeiro.

“Pois qual de vós, querendo edificar uma torre, não se assenta primeiro a fazer as contas dos gastos, para ver se tem com que a acabar? Para que não aconteça que, depois de haver posto os alicerces, e não a podendo acabar, todos os que a virem comecem a escarnecer dele, dizendo: Este homem começou a edificar e não pôde acabar.”
(Jesus, O Cristo.)

“A Ciência é a aproximação progressiva do homem com o mundo real.”
(Max Planck.)

“O cientista não estuda a natureza porque ela é útil; estuda-a porque se delicia com ela, e se delicia com ela porque ela é bela. Se a natureza não fosse bela não valeria a pena conhecê-la e, se não valesse a pena conhecer a natureza, não valeria a pena viver.”
(Henri Poincaré.)

“A Ciência não pode resolver o mistério final da natureza. E isso é porque, em última análise, nós mesmos somos parte da natureza e, portanto, parte do mistério que estamos tentando resolver.”
(Max Planck.)

RESUMO

Modelos de busca aleatória são úteis para descrever uma grande gama de problemas, em especial em biologia e ecologia, onde é tratado o movimento animal. Uma hipótese comum nestes modelos é que o animal procura constantemente por algo, como alimento, par ou abrigo, ou seja, os animais forrageiam no ambiente onde vivem. Neste trabalho trataremos de problemas relacionados ao movimento animal por meio de métodos tradicionais de Física, como a mecânica clássica e a mecânica estatística. Focamos em três aspectos específicos deste problema que raramente são abordados nestas áreas: (1) o problema de transientes (até um estado estacionário) no processo de busca; por meio de um modelo analítico caracterizamos a dinâmica do transiente em um processo de Lévy. A distribuição de alvos no ambiente é dinâmica e é descrita por meio de dois processos: criação e aniquilação de alvos. As grandezas de interesse do sistema exibem o comportamento do tipo exponencial durante o transiente para a estratégia de busca totalmente balística. (2) Como uma dinâmica combinada entre diferentes tipos de organismos, pode resultar na emergência de um processo de movimento em conjunto, que seja útil (simbiótico), para todos os indivíduos envolvidos. (3) Finalmente, estudamos se um certo processo estocástico, especialmente associado a forrageamento, advém de uma única distribuição estatística, ou se é composta por duas ou mais distribuições que descrevem processos superdifusivos.

Palavras-chave: Física estatística. Tempo transiente. Regime simbiótico. Processos superdifusivos combinados. Sistemas complexos.

ABSTRACT

Random search models are useful to describe a wide range of problems, especially in biology and ecology, where animal movement is treated. A common hypothesis in these models is that the animal constantly looks for something, such as food, pair, or shelter, that is, animals forage in the environment where they live. In this work, we will deal with problems related to animal movement by means of traditional methods of Physics, such as classical mechanics and statistical mechanics. We focus on three specific aspects of this problem that are rarely addressed in these areas: (1) the problem of transients (toward a steady state) in the random search process; by means of an analytical model, we characterize the dynamics of the transient in a Lévy process. The distribution of targets in the environment is dynamic and is described through two processes: the creation and annihilation of targets. The interest quantities of the system show the behavior of the exponential type during the transient for the totally ballistic search strategy. (2) How a combined dynamic between different types of organisms, it can result in the emergence of a joint movement process, which is useful (symbiotic), for all individuals involved. (3) Finally, we studied whether a certain stochastic process, especially associated with foraging, comes from a single statistical distribution, or whether it is composed of two or more distributions that describe superdiffusive processes.

Keywords: Statistical physics. Transient time. Symbiotic regime. Superdiffusive processes combined. Complex systems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 2.1 – Função distribuição de frequência acumulada para o peso dos alunos em um determinado teste de aptidão física. A função é do tipo degrau cujo o tamanho de cada degrau é $1/5$. Para valores menores do que o menor valor da amostra $F(x) = 0$. Para valores maiores do que o maior valor da amostra $F(x) = 1$. A cada ocorrência dos n valores da amostra, $F(x)$ dá um salto de altura $1/5$ 27
- Figura 3.1 – Figura representativa do espaço de estados \mathcal{S} (da área A), no qual estados são aleatoriamente criados a uma certa taxa $1/\tau$. As aniquilações desses estados ocorrem devido a processos estocásticos de reação-difusão. Uma quantidade relevante é o número de estados efetivos em \mathcal{S} no instante de tempo t , a quantidade $N(t)$. O transiente dinâmico pode ser caracterizado por meio da variação temporal de $N(t)$ até alcançar o limite estacionário em $t = T_{est}$, tal que $N(t > T_{est}) = cte$. No espaço \mathcal{S} é possível definir uma métrica para o sistema considerando que a distância média entre os estados é dada por $\xi(t) = \sqrt{A/N(t)}$ 57
- Figura 3.2 – Número de alvos no ambiente em função do tempo. A distância característica λ determina o quão rápido o ambiente alcança o estado estacionário. A configuração com λ grande atinge a estacionariedade mais rapidamente porque o caminhante percorre maiores distâncias e, com uma estratégia de busca balística encontra mais alvos, fazendo com que no ambiente permaneça uma quantidade menor de alvos. Note que os valores estacionários são inversamente proporcionais a λ 64
- Figura 3.3 – O número de alvos disponíveis como função do tempo para **a)** modelo analítico e na simulação computacional **b)**. A estocasticidade inerente ao problema leva à flutuações nos alvos disponíveis no ambiente. 66
- Figura 3.4 – Número de alvos detectados em função do tempo para diferentes distâncias características e estratégia de busca balística, obtidas por meio do modelo analítico **a)** e pelas simulações computacionais **b)**. Os resultados obtidos no modelo analítico reproduzem, com boa concordância, os resultados obtidos nas simulações. Observa-se que durante o tempo transiente, o número de alvos detectados é governado pelo termo exponencial de acordo com a Eq. 3.27. Após o tempo transiente, o número de alvos detectados é governado pelo termo linear na Eq. 3.27. 67

Figura 3.5 – Comparativo entre os tempos estacionários obtidos por meio das simulações computacionais em **a)** e por meio do modelo analítico **b)**. Para $\lambda = 5000$, o tempo estacionário obtido no modelo analítico é $T_{est} = 0,950 \times 10^8$ e na simulação é $T_{est} = 1,12 \times 10^8$, com um erro relativo $\epsilon = 15\%$, tomando o tempo estacionário da simulação computacional como valor de referência. No caso em que $\lambda = 10000$, o modelo analítico exibe um tempo estacionário $T_{est} = 6,02 \times 10^7$, e a simulação exibe $T_{est} = 6,13 \times 10^7$ com um erro relativo $\epsilon = 1,8\%$ 69

Figura 3.6 – Número de alvos no ambiente em função do tempo para várias estratégias de busca e diferentes distâncias características, designadas por $\tau = \tau_0 = 2,5 \times 10^3$ (curvas em preto), $\tau = 2\tau_0$ (curvas em vermelho), $\tau = 4\tau_0$ (curvas em verde) e $\tau = 8\tau_0$ (curvas em azul). As curvas contínuas representam os resultados obtidos por meio das simulações computacionais, enquanto que, as linhas tracejadas representam as curvas obtidas por meio do modelo analítico. No item (a) $\mu = 1.01$, (b) $\mu = 1.5$ e (c) $\mu = 2.0$. A caixa destacada no item (c), mostra a comparação entre a estacionariedade sendo alcançada no começo das simulações, e sendo alcançada no começo do modelo analítico. 71

Figura 3.7 – Evolução temporal do número de alvos encontrados pelo caminhante para diferentes estratégias de busca e distância característica $\tau = 2500$. À medida que $\mu \rightarrow 3,0$, o número de alvos que o caminhante encontra leva mais tempo para alcançar o regime estacionário. Os itens de (a) à (c) mostram as comparações entre o modelo discreto (linhas contínuas) e modelo contínuo (linhas tracejadas). A caixa destacada mostra os tempos próximos a T_{est} , após os quais $N_a(t)$ cresce linearmente com coeficiente angular $\tan(1/\tau)$ 73

Figura 3.8 – Número de alvos encontrados para diferentes estratégias de busca e distância característica fixa $\tau = 2500$. Os asteriscos marcam os instantes de tempo em que o encontro de alvos entra no regime estacionário, isto é, quando o modulo da diferença entre a taxa de variação de $N_a(t)$ e o coeficiente angular da reta $1/\tau$, é aproximadamente zero com precisão $\delta \sim 10^{-5}$ 74

Figura 3.9 – Comparação entre estratégias de busca utilizadas no modelo discreto, por meio das simulações computacionais, e no modelo contínuo, por meio de integrações numéricas. A linha preta indica a estratégia de busca utilizada no MD. A linha vermelha pontilhada indica a estratégia utilizada em no MC. A comparação foi realizada utilizando a distância característica $\tau = 2500$ 75

- Figura 3.10–Ajuste da curva para as estratégias de busca utilizando o método numérico para a solução da Eq. 3.17. Os pontos em pretos indicam os pares de expoentes (μ_{MC}, μ_{MD}) , que ajustam as estratégias de busca do modelo contínuo às estratégias de busca do modelo discreto. A curva em preto contínua, representa o ajuste dos pontos a fim de obter uma curva segundo a Eq. 3.30. É observado que à medida que a distância característica τ aumenta, os valores dos expoentes do modelo contínuo μ_{MC} , diminuem para se ajustarem ao MD. 76
- Figura 3.11–Espaço de parâmetro para o número de alvos no ambiente no MC. A figura mostra $N(t)$ para os pares (μ, τ) após o ambiente alcançar o tempo estacionário, T_{est} . O espaço de parâmetros mostra de que forma evolui o número de alvos disponíveis no ambiente quando se varia de forma contínua os pares de parâmetros (μ, λ) . Na figura, para a estratégia de busca $\mu = 1,5$, diferentes distâncias características levam à diferentes configurações estacionárias para o número de alvos disponíveis. O mesmo ocorre quando fixamos a distância característica, como por exemplo, $\lambda = 2500$ e variamos o expoente que descreve a estratégia de busca. . . . 78
- Figura 3.12–Espaço de parâmetros para o número total de alvos disponíveis no ambiente. No item **a)** o espaço de parâmetros analítico: caixa destacada da figura 3.11. In **b)**, espaço de parâmetros da simulação. cada cor representa o valor médio de alvos disponíveis obtidos por meio da Eq. (3.23). 80
- Figura 3.13–Espaço de parâmetros para o número total de alvos disponíveis no ambiente. O item **a)** mostra o espaço de parâmetros analítico corrigido pelo fator multiplicativo $\exp(1.0 - \mu)$. No **b)**, o espaço de parâmetros obtido da simulações. O fator exponencial corrige o espaço de parâmetros analítico aproximando-o dos valores obtidos nas simulações computacionais. 81
- Figura 3.14–A evolução temporal para o número de alvos disponíveis no ambiente de acordo com a figura 3.13-(b). Para três diferentes estratégias de busca, o número de alvos disponíveis se ajustam, muito bem, sobre uma mesma curva para cada distância caracterísitica, mostrando que a estratégia de busca não influencia a quantidade de alvos no ambiente durante o transiente, para estratégias próximas do regime balístico. 82

- Figura 3.15–Instantâneos do número de alvos disponíveis no ambiente obtidos por meio das simulações computacionais para quatro diferentes instantes de tempo durante o transiente e distância característica $\tau = 2500$, obtidas da figura 4.6. Os pontos pretos representam as posições dos alvos disponíveis. No início da busca, são criados mais alvos do que o caminhante consegue encontrar. Porém, as três diferentes estratégias de busca mostram que o número de alvos no ambiente é qualitativamente igual. Pode-se observar, que do transiente à configuração estacionária, o número de alvos para os três diferentes valores do expoente μ , possuem a mesma aproximadamente a mesma configuração para o número de alvos disponíveis. 83
- Figura 3.16–Instantâneos do número de alvos detectados pelo caminhante durante o transiente. Os pontos em vermelho representam as coordenadas dos alvos que foram encontrados no ambiente durante o tempo transiente. Para um dado instante de tempo, o número de alvos encontrados independe da estratégia de busca adotada pelo caminhante. 84
- Figura 3.17–Trajetórias típicas executadas pelo caminhante que adota uma distância característica $\lambda = 2500$, quando o ambiente tem diferentes números de alvos disponíveis. O ponto em verde representa um alvo encontrado (AE) pelo caminhante. O ponto em vermelho representa o próximo alvo que é encontrado e a linha em preto constitui a trajetória formada entre o encontro dos dois alvos sucessivos. À medida em que a estratégia de busca se aproxima do valor $\mu = 1,50$, a frequência dos passos de tamanhos grandes se torna menor fazendo o caminhante dar mais passos para encontrar um alvo. A influência da condição periódica de contorno pode ser vista quando o caminhante se aproxima das extremidades do ambiente, como por exemplo, para $\mu = 1,01$ e $AE = 1000$. Após o caminhante encontrar cerca de dez mil alvos, a distância que o caminhante percorre se torna cada vez menor, se aproximando do valor do livre caminho médio. 85
- Figura 3.18–Comparação das estratégias de busca para dois diferentes tamanhos de ambiente de busca. À esquerda, o número de alvos disponíveis não muda para estratégias de busca próximas ao regime balístico e exibem o mesmo comportamento para a mesma distância característica. Na medida em que o tamanho do ambiente aumenta (à direita), não somente o número de alvos disponíveis alcança a configuração estacionária em valores maiores como também as estratégias de busca exibem sensível diferença após longos intervalos de tempo. 87

- Figura 3.19—Evolução temporal da eficiência de busca para a estratégia de busca balística e diferentes distâncias características. A eficiência alcança o limite estacionário mais rapidamente para valores maiores de τ e na estacionariedade, $\eta(\tau) = 1/\tau$. O modelo contínuo exibe uma boa concordância com o modelo discreto, mostrado no item (b). A caixa destacada à direita, no item (a), mostra o comportamento da eficiência durante o transiente, para o modelo contínuo. 91
- Figura 3.20—Eficiência de busca em função do tempo para diferentes estratégias de busca e distância característica fixa τ , no modelo contínuo. A estratégia de busca que otimiza o encontro dos alvos é $\mu = 1,0$. As demais estratégias mostram que a eficiência de busca alcança o limite estacionário mais lentamente. No limite estacionário $\eta(t \geq T_{est}) = 1/\tau$, independente da estratégia de busca. 92
- Figura 3.21—Evolução temporal da eficiência de busca, no modelo discreto, para diferentes expoentes μ e distância característica fixa, $\tau = 2500$. Independente da estratégia de busca adotada, a eficiência cresce rápido e, então, a taxa se torna aproximadamente constante. A caixa destacada no interior da figura (item (f)), informa que η varia lentamente para $\mu = 1,01$, próximo do regime assintótico. As caixas destacadas no topo da figura comparam as eficiências obtidas via simulação computacional (linhas contínuas) e os resultados obtidos por meio do modelo analítico (linhas tracejadas). . . . 93
- Figura 4.1 – Epibiontes *Vorticella sp.* unidos a seus hospedeiros, as diatomáceas. Em **A)**, o epibionte *Vorticella sp.* está unido à diatomácea *Coscinodiscus Wailesii sp.*; e em **B)**, unida à diatomácea *Chaetoceros sp.* Na figura **C)**, mostramos a *Vorticella sp.* juntamente com os cílios utilizados para gerar as microcorrentes de alimentação. 99
- Figura 4.2 – Esboço dos vetores envolvidos no incremento do ângulo de giro. Partindo de um referencial que se encontra no ambiente, a figura descreve o incremento no valor do ângulo de acordo com a distância do epibionte ao centro geométrico. A vetor que descreve a diferença entre a posição do i -ésimo epibionte, $\mathbf{e}_n^{(i)}$ e a posição do centro geométrico, dado por $\mathbf{e}_n^{(i)} - \mathbf{r}_n$, é projetado na direção horizontal da diatomácea, representado pelo versor, $\hat{\mathbf{u}}_n$. Desse modo, o termo $\frac{(-1)^{(i)}}{\delta(i)}(\mathbf{e}_n^{(i)} - \mathbf{r}_n) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n$, informa o fator multiplicativo no infinitésimo de ângulo, $d\phi$. Este fator é tanto maior quanto mais afastado o epibionte se encontra do centro geométrico. . . . 104

- Figura 4.3 – Esboço descritivo das distâncias consideradas no cálculo da espessura do ambiente da simulação. A distância que descreve o raio de visão do epibionte em relação a partícula, é representada por d , e c , define o tamanho do pedúnculo. O comprimento A , traça a distância da base do pedúnculo à partícula, e é descrito em termos da distância do centro geométrico até a partícula, dada por p , e da distância do centro geométrico ao epibionte, dada por $h/2$. Desse modo, a espessura do ambiente da simulação é descrito em termos dos parâmetros do sistema. 107
- Figura 4.4 – Conjunto de pontos que formam a estrutura dos *Chaetoceros sp.* e a extremidade das Vorticellas. Os pontos em vermelho constituem as extremidades da diatomácea. Os pares de pontos coloridos formam a base dos pedúnculos e a extremidade das zooides contidos na parte superior e inferior do epibionte. 109
- Figura 4.5 – Conjunto de pontos que descrevem a estrutura da Vorticella. Os pontos em vermelho representam uma aproximação para a forma cônica do zooide. Os pontos em verde formam a base do pedúnculo e a extremidade do zooide, que pertencem a região superior (ou inferior) da Vorticella conforme mencionado na figura 4.4. 109
- Figura 4.6 – Comparativo entre a associação (Chaetoceros-Vorticellas) modelado computacionalmente (à esquerda) e os dados observacionais (à direita). O lado esquerdo da figura mostra o conjunto de pontos ligados por linhas, formando, no arquivo de saída, a associação. 110
- Figura 4.7 – Esboço descritivo para o cálculo do NGDR. O deslocamento líquido é a soma de todos os segmentos de trajetórias (representados pela cor preta). A distância entre o ponto inicial e final da trajetória expressa o deslocamento bruto (linha em vermelho). A medida do NGDR é a razão entre as duas distâncias, calculada em um determinado intervalo de tempo. 112
- Figura 4.8 – Cálculo do NGDR em função do número de quadros obtida experimentalmente. Cada vinte quadros equivale a um segundo de gravação. Os pontos na figura representam os segmentos de trajetória de diferentes associações Chaetoceros-Vorticellass. Os pontos em preto indicam as associações que descreveram segmentos de trajetórias retilíneas e a curva em preto (e cinza) corresponde à aplicação de uma regressão local para mostrar a tendência na estabilidade do NGDR. Os pontos em cinza caracterizam os segmentos de trajetória curvilínea e helicoidal. A região sombreada em torno da curva em cinza representa a margem de erro da regressão local. A linha tracejada vertical indica a posição em que os valores de NGDR começaram a apresentar uma tendência estacionária. Para valores maiores do que 200 quadros o valor do NGDR, para as três diferentes trajetórias, mantém-se estável. 113

Figura 4.9 – Comparação entre dados experimentais (itens A-D), e dados obtidos via simulação computacional (itens E-H), para a distribuição de velocidade mediana instantânea em função do NGDR. Em ambiente sem nenhuma concentração de alimento (item A), a associação adapta seu movimento para executar uma trajetória mais rápida e retilínea percorrendo, assim, mais regiões a procura de alimento. À medida em que a concentração de alimento aumenta, itens C-D o padrão RR desaparece e a associação executa uma trajetória mais curvilínea e retilínea (item D). Os resultados da simulação computacional mostram, de forma qualitativa, a mesma tendência na distribuição das velocidades medianas instantâneas, exceto para a trajetória helicoidal.	115
Figura 4.10–Simulação computacional das trajetórias da associação <i>Chaetoceros-Vorticellass</i> em ambientes com diferentes concentrações de partículas. A trajetória tem início na origem do sistema de coordenadas e a escala indica os valores dos pontos da trajetória no plano xy . Após um número de 16000 iterações, comparamos trechos das trajetórias das simulações computacionais com as trajetórias obtidas experimentalmente. A comparação é mostrada pelas caixas destacadas. Desconsiderando os efeitos da condição de contorno, as trajetórias obtidas por meio da simulação computacional mostram boa concordância em relação àquelas obtidas experimentalmente.	117
Figura 5.1 – Comparação entre a FDA de Lévy de referência (curva em preto), e a FDA da combinada (curva em vermelho) para três diferentes valores do parâmetro ω e $\ell_{máx} = 100$. A figura mostra que, à medida em que o parâmetro ω cresce, a região côncava da FDA da combinada se ajusta melhor a região côncava da FDA de Lévy.	124
Figura 5.2 – Análise comparativa entre a forma funcional da distribuição de Lévy de referência (curva em preto) e a distribuição de Lévy combinada (curva em vermelho) para $\omega = 0,5, 0,7$ e $0,9$ e $\ell_{máx} = 100$. As caixas destacadas mostram que, à medida em que o parâmetro ω cresce, as funções $f(x)$ e $g(x)$ se desajustam para valores de $x \rightarrow 0$	125
Figura 5.3 – Análise comparativa entre a distribuição de Lévy combinada (pontos em vermelho), obtida numericamente, e a forma funcional da distribuição combinada de Lévy (linha contínua preta) para $\ell_{máx} = 1000$. As caixas destacadas mostram que os dados obtidos numericamente se ajustam muito bem a forma funcional da distribuição combinada de Lévy para os quatro valores de ω	126

- Figura 5.4 – Teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov realizado entre a distribuição de probabilidade de Lévy de referência e a distribuição de probabilidade combinada. O gráfico mostra a variação do valor de $D_{máx}$ e de $p - valor$ para $\omega \in [0,1; 0,9]$ em que $\ell_{máx} = 100$. Para cada valor de ω , $D_{máx}$ caracteriza a maior distância entre as distribuições de probabilidade de referência e combinada. O menor valor de $D_{máx}$ ocorre para $\omega = 0,5$. Para esse valor de ω , o $p - valor \approx 1,0$, mostrando que as amostras tem aproximadamente 100% de certeza de pertencerem a mesma população. . 128
- Figura 5.5 – Comparação do valor de $D_{máx}$ e do $p - valor$ para $\ell_{máx} = 1000$ e 10000 como função do parâmetro ω . Vemos que o menor $D_{máx}$ ocorre para $\omega = 0,4$. É possível observar que o valor de $D_{máx}$ para $\ell_{máx} = 10000$, é menor do que para $\ell_{máx} = 1000$ evidenciando a influência do tamanho do ambiente na estratégia de busca. 129
- Figura 5.6 – Estatística de Kolmogorov-Smirnov para três distribuições de probabilidades. À esquerda, as diferenças absolutas entre as distribuições de probabilidades acumuladas em função do peso estatístico ω . Nos itens de (a) à (c), a curva em preto descreve a variação de D para uma distribuição de Lévy cuja às variáveis aleatórias, foram associados um ruído randômico (distribuição “empírica”) com uma distribuição de probabilidade isenta desse ruído (distribuição referência). A curva em vermelho expressa a estatística K-S entre a distribuição “empírica” e distribuição combinada. A curva em verde, por fim, mostra a estatística entre a distribuição de Lévy isenta de ruído com a distribuição de Lévy combinada. A presença de ruídos associados aos dados torna difícil a distinção da estratégia de busca adotada pelo buscador. À direita, os respectivos valores de α em função de ω 132
- Figura 5.7 – Teste de Kolmogorov-Smirnov comparando os espaços amostrais das três distribuições de probabilidades: “empírica”, de referência e combinada. Na curva em vermelho, vemos que a adição de um pequeno erro percentual já torna difícil distinguir se o espaço amostral de distribuição “empírica” e de referência pertencem a populações diferentes para $\omega = 0,5$ 133
- Figura 5.8 – Estatística de Kolmogorov-Smirnov para três diferentes distribuições de probabilidades e um erro percentual de 20% e 25% associado a cada elemento do espaço amostral que compõe a distribuição de probabilidade “empírica”. O erro percentual faz com que diferença absoluta entre as distribuições acumuladas de probabilidade “empírica” e de referência aumente. Para este tipo de incerteza, o teste K-S mostra que é mais provável que o espaço amostral da distribuição de referência pertença a mesma população que o espaço amostral da “empírica”, do que a distribuição soma. 134

- Figura 5.9 – Teste de Kolmogorov-Smirnov comparando os espaços amostrais das três distribuições de probabilidade. À distribuição empírica foi associado uma incerteza aleatória de 10% e 15%. Nota-se que uma incerteza associada de 10% dificulta distinguir se os espaços amostrais, das distribuições de referência e da soma, pertencem a diferentes populações para $\omega = 0,7$. À direita, os p – valores para a estatística de Kolmogorov-Smirnov. 135
- Figura 5.10 – Distribuição acumulada de probabilidade para quatro diferentes valores de ω e uma incerteza de 10% associada a distribuição de probabilidade “empírica”, conforme a figura 5.9. As distribuições de probabilidade acumulada coincidem no mesmo ponto para $\omega = 0,7$ mostrando que nesse ponto, as três distribuições mostram a mesma diferença absoluta entre suas maiores distâncias. As variáveis independentes estão em escala logarítmica para melhor visualização das curvas, uma vez que a distribuição de probabilidade acumulada tem a propriedade de ser invariante por escala na variável independente. 136
- Figura 5.11 – Teste de Kolmogorov-Smirnov entre as três distribuições de probabilidade: “empírica”, referência e combinada. A cada elemento do espaço amostral da distribuição de probabilidade “empírica”, é associada uma incerteza de 20% (topo) e 25% (base) do valor do próprio elemento do espaço amostral. Conforme a incerteza aumenta, a curva em preto, que representa a comparação entre a distribuição “empírica” e a de referência, e a curva em vermelho, que representa a comparação entre a distribuição “empírica” e a combinada por uma soma, se ajustam sobre a mesma curva. 137
- Figura 5.12 – Distribuições acumuladas de probabilidades dos três espaços amostrais: “empírico” (azul e vermelho), de referência (ciano) e combinada por uma soma (em laranja). A figura mostra que, para cada valor de ω , o valor de D , que é a maior diferença absoluta entre as distribuições acumuladas de probabilidade, são iguais. 138
- Figura 5.13 – Espaço de parâmetros (ω_1, ω_2) para a estatística de Kolmogorov-Smirnov. Os intervalos de ω_1 e ω_2 considerados, formam uma matriz 100×100 . Para cada ponto (ω_1, ω_2) do espaço de parâmetros, a cor representa o valor de D . A região central da figura reúne os melhores valores da estatística K-S e mostra que a frequência da estratégia de busca Browniana é baixa ou mesmo, nula. A região em cinza representa o conjunto de pontos (ω_1, ω_2) , em que a condição de normalização é violada. 141
- Figura 5.14 – Espaço de parâmetros (ω_1, ω_2) para os níveis de significância dos valores de D , presentes na figura 5.13. A região central da figura reúne os melhores níveis de significância do teste K-S, mostrando que a frequência com que o buscador realiza uma estratégia Browniana é nula. 142

LISTA DE TABELAS

- Tabela 3.1 – Forma funcional do ajuste de curvas da figura 3.10 para as diferentes distâncias características τ , percorridas pelo forrageador. As funções ajustam os valores do MC aos do MD. 77
- Tabela 5.1 – Conjunto de dados obtidos por meio do teste estatístico Kolmogorov-Smirnov para diferentes valores de $\ell_{m\acute{a}x}$. Destacamos na tabela, os melhores valores que verificam o teste K-S. Para valores maiores de $\ell_{m\acute{a}x}$ (itens **b** e **c**), o valor do parâmetro ω diminui sensivelmente, evidenciando que o buscador divide 40% da sua busca executando uma estratégia de busca balística e os outros 60% da busca realizando uma estratégia de busca que otimiza o encontro de alvos. 127

SUMÁRIO

1	Introdução	17
2	Fundamentos Teóricos	22
2.1	Variáveis Aleatórias	22
2.1.1	Variável aleatória discreta e sua distribuição de probabilidades	23
2.1.2	Variável aleatória contínua e a função densidade de probabilidades	23
2.1.3	Momentos de variáveis aleatórias	24
2.1.4	Distribuição acumulada de probabilidades	25
2.1.5	Função característica	28
2.2	Processos Aleatórios	28
2.2.1	Processos Brownianos	30
2.2.2	Processos de Poisson	30
2.2.3	Processos de Lévy	31
2.3	Teorema Central do Limite	31
2.4	Aproximação de Campo Médio	33
2.5	Caminhada Aleatória	35
2.5.1	Movimento Browniano	36
2.5.2	Voos e caminhadas de Lévy	39
2.6	O Problema da Caminhada Aleatória	43
2.7	Estatística Não Paramétrica e o Teste Estatístico de Kolmogorov-Smirnov	45
2.7.1	Estatística paramétrica e não paramétrica	45
2.7.2	O teste de Kolmogorov-Smirnov	46
2.8	O Método Da Inversão	47
2.9	Transientes	50
3	Caracterização da Dinâmica Durante o Transiente para Processos de Lévy	54
3.1	Introdução	54
3.2	O Modelo Analítico	56
3.3	Resultados	63
3.3.1	Caracterização da dinâmica durante o transiente para a estratégia de busca $\mu = 1,0$	63
3.3.2	Caracterização da dinâmica durante o transiente para diferentes estratégias de busca	70
3.4	A Eficiência de Busca	88
3.5	Conclusões e Perspectivas Futuras	93
4	Simulando Computacionalmente a Motilidade da Associação <i>C. coarctatus</i>-<i>Vorticellas</i>	96
4.1	Introdução	96

4.2	O Epibionte <i>Vorticella sp.</i> e a Associação C. coarctatus-Vorticella	98
4.3	O Método para o Modelo Computacional	100
4.4	Resultados	111
4.5	Conclusões e Perspectivas Futuras	119
5	Estratégias de Lévy Combinadas	122
5.1	Introdução	122
5.2	Resultados	124
5.3	Influência de Erros Associados à Medidas Experimentais	130
5.4	Estatística de Kolmogorov-Smirnov Aplicada a uma Distribuição Combinada por uma Soma de Três Estratégias de Busca	139
5.5	Método de Separação de Variáveis Aleatórias e o Teste de Kolmogorov-Smirnov	143
5.6	Conclusões e Trabalhos Futuros	144
6	Conclusões	147
	Referências	149

INTRODUÇÃO

*Minha terra tem palmeiras,
Onde canta o sabiá;
As aves que aqui forrageiam,
Não forrageiam como lá.*

*Canção do exílio.
Rusch, parodiando Gonçalves Dias.*

A Ciência pode ser considerada o conjunto de conhecimentos acerca da natureza. Por meio de métodos que se aprimoraram ao longo dos séculos, o homem procurou entender, não só as leis que regem os fenômenos materiais, mas também as grandezas envolvidas nestes fenômenos. Para este fim, os cientistas lançaram (e ainda lançam) mão de modelos que são, basicamente, construções aproximadas que descrevem, de maneira simples, as características frequentemente complexas da natureza. Assim, ideias e conceitos gerais são usados para descrever os mais diferentes sistemas, de certa forma caracterizando distintos processos físicos, químicos, biológicos etc, em grandes grupos, tais como sistemas complexos, fenômenos críticos, dinâmica estocástica e caminhadas aleatórias.

De um modo geral, o termo caminhada aleatória se refere a padrões de trajetórias formadas por variáveis aleatórias. Teve sua controversa origem marcada pelo envio de uma carta à revista *Nature* pelo então estatístico, Karl Pearson [1]. Nesta carta, Pearson propõe o famoso problema da caminhada aleatória em que, um homem, começando do ponto 0, dá passos de tamanhos iguais em linha reta e, então, muda para uma direção qualquer, continuando a dar passos de tamanhos iguais. Pearson indaga sobre a probabilidade do homem se encontrar a uma distância entre r e $r + \delta r$, após dar n passos. O tipo mais simples de caminhada aleatória foi observado pelo botânico Richard Brown [2]. Observando o movimento de partículas de pólen na superfície de um líquido, Brown foi o primeiro a observar o que mais tarde foi formulado matematicamente por Albert Einstein como o

movimento Browniano [3]. Assim, Einstein demonstra que as caminhadas aleatórias podem seguir uma lei de movimento, com tamanho de deslocamentos e ângulos, descritos por distribuições de probabilidade. Tais leis de movimento podem, ou não, ter parâmetros que descrevam a distribuição de probabilidade, tais como o valor médio e a sua dispersão.

Desse modo, modelos de caminhada aleatória são modelos úteis para descrever uma grande gama de problemas, em especial em biologia e ecologia, dentre eles o movimento animal. São úteis porque o movimento dos animais pode depender de muitos fatores como, por exemplo, a atividade específica do organismo do animal [4]. Assim, modelos de caminhada aleatória, de uma maneira geral, descrevem o padrão da trajetória realizada pelo caminhante, incluindo à aleatoriedade do modelo, fatores que não se podem prever *a priori* [5]. Uma hipótese comum nestes modelos é que o animal procura constantemente por algo, como alimento, par ou abrigo, ou seja, os animais forrageiam¹ no ambiente onde vivem. Além disso, os animais têm pouca, ou nenhuma informação, acerca da localização do que buscam, de modo que procuram otimizar a sua eficiência de busca por meio de uma boa estratégia.

Em biologia, há uma grande tradição na utilização de caminhadas aleatórias [6]. Modelos de caminhadas aleatórias são usados para descrever, por exemplo, o tempo médio de captura de uma partícula por um meio absorvente, cujo o exemplo mais importante é a difusão de uma molécula repressora ao longo do DNA. Além disso, são usadas caminhadas aleatórias para descrever a difusão de bactérias por meio da distribuição de Poisson, caracterizar a motilidade de microorganismos como a *Escherichia Coli*, etc. Somente na década de oitenta, modelos de caminhada aleatória ganharam distribuições mais gerais. Em especial, a distribuição de Lévy que passou a ser usada no contexto específico do problema de forrageamento animal.

Nesse contexto surge a hipótese de forrageamento por meio de voos de Lévy, que afirma que voos de Lévy truncados otimizam a eficiência de busca aleatória. A distribuição de Lévy truncada é uma distribuição do tipo lei de potência usada para descrever os passos aleatórios (de tamanhos variáveis) dados pelo forrageador. O expoente da lei de potência determina a estratégia de busca, e permite tanto buscas superdifusivas quanto buscas Brownianas [7]. É nesse panorama que a Física se insere com duas correntes tradicionais da física em si: dinâmica, ou seja, movimento, e processos aleatórios que são bem tratados por meio de física estatística. Por isso, esta tese se constitui uma tese de física mas tendo como foco de tratamento, problemas em biologia, mais especificamente na ecologia de movimento animal.

Dado que a proposta desta tese é tratar de problemas relacionados com o movimento animal por meio de métodos tradicionais de Física, como a mecânica clássica e a mecânica estatística, focaremos em três aspectos específicos deste problema que raramente são abordados nestas áreas: (1) o problema de transientes (até um estado estacionário) no

¹ Forragear: ir de um lugar para o outro buscando, especialmente comida; buscar, vasculhar.

processo de busca; (2) como uma dinâmica combinada entre diferentes tipos de organismos, pode resultar na emergência de um processo de movimento em conjunto, que seja útil (simbiótico), para todos os indivíduos envolvidos. (3) Finalmente, como determinar se um certo processo estocástico, especialmente associado a forrageamento, advém de uma única distribuição estatística, ou se é composta por duas ou mais distribuições. E isto no contexto de distribuições advindas de processos superdifusivos, ou seja, descritas por leis de potência (que é o comportamento assintótico das distribuições α -estáveis de Lévy), que é extremamente difícil de caracterizar.

O transiente (algo que dura por um curto período de tempo, temporário, fugaz, *Cambridge Dictionary*), é frequentemente descartado em modelos físicos, sobretudo, em modelos de busca aleatória. Sistemas físicos em regime transiente apresentam grandes flutuações estocásticas e por isso, tornando-se difícil analisá-los. Estudos sobre a convergência de processos de Lévy foram realizados identificando as condições necessárias e suficientes à convergência da distribuição estável de Lévy [8,9]. Embora estudos tenham sido realizados buscando entender a convergência dos processos de Lévy, pouco se sabe sobre o comportamento da dinâmica do transiente de processos que utilizam a distribuição de Lévy truncada.

Modelos de caminhada aleatória cada vez mais sofisticados surgiram à medida que padrões de movimentos mais complexos foram estudados. Em problemas que levam em conta forrageamento em grupo, seguidos por um líder, modelos de caminhada aleatória foram utilizados para entender o comportamento emergente na dinâmica de busca do grupo, e a sua consequência na eficiência global [10]. Nesse cenário de buscas em grupo, nas quais o ambiente de busca possui baixa densidade de alvos (presas), o forrageamento, seguindo uma estratégia de Lévy, é mais vantajoso para o grupo, quando comparada com a estratégia Browniana.

As características exatas das regras do grupo de forrageadores dependem dos detalhes do processo de forrageamento como, por exemplo, a regeneração dos recursos no ambiente e o custo energético do grupo. Desse modo, a natureza dos ambientes de busca impõe regras específicas, e na maioria das vezes complexas, ao processo de busca. Dependendo da disponibilidade dos recursos e a forma do ambiente o mesmo forrageador pode adotar um processo de busca diferente, ou seja, pode adotar um processo de busca combinado por diferentes estratégias [11]. Diante desse fenômeno, uma importante e difícil questão surge: como caracterizar um conjunto de dados empíricos, de modo a saber à qual distribuição de probabilidade os dados pertencem?

Sobre esta tese

Esta tese constitui uma gama de diferentes problemas tratados durante o período de doutoramento. Os capítulos apresentados correspondem a diferentes problemas relacionados

à caracterização do movimento de seres vivos. Todos eles foram modelados utilizando caminhadas aleatórias. Em cada um dos capítulos é apresentada uma introdução ao problema, contendo uma revisão de trabalhos relacionados na literatura. As conclusões referentes a cada um deles são apresentadas ao fim de cada capítulo, após a discussão dos seus respectivos resultados.

No capítulo 2 apresentamos os principais aspectos teóricos para o entendimento dos modelos apresentados neste trabalho. São abordados conceitos básicos da teoria das probabilidades e o conceito de processo estocástico é definido. Definições formais de tipos de processos estocásticos são apresentadas, de modo a dar ao leitor o fundamento teórico de algumas, das diferentes estratégias de busca. A busca aleatória no contexto das caminhadas de Lévy é discutida em termos das distribuições α -estáveis de Lévy e a distribuição truncada de Lévy é definida. Por fim, no contexto da busca aleatória, são discutidas as caminhadas de Lévy e sua utilidade dentro da teoria do forrageamento animal.

No capítulo 3 propomos um modelo para caracterizar a dinâmica do transiente em um processo de Lévy. A distribuição de alvos no ambiente é dinâmica e é descrita por meio de dois processos: criação e aniquilação de alvos. A cada distância característica percorrida pelo forrageador, um alvo é colocado no ambiente. Para a estratégia de busca balística, o modelo analítico exhibe uma solução exata. As grandezas de interesse do sistema tais como, número de alvos disponíveis no ambiente, alvos encontrados pelo forrageador e a eficiência de busca, exibem o comportamento do tipo exponencial durante o transiente para a estratégia de busca totalmente balística. Os resultados das estratégias de busca sobre a dinâmica do ambiente, obtidos por meio do modelo analítico, foram comparados com os resultados obtidos via simulação computacional.

No capítulo 4 desenvolvemos um método de modelagem computacional que descreve o movimento de um micro-organismo que vive em um regime simbiótico: o protista *Vorticella* sp. Esse protozoário, que é classificado como um epibionte por viver preso a outros organismos vivos, é encontrado nas superfícies das águas do litoral paulista. Modelamos computacionalmente a estrutura da associação e o seu movimento. Os resultados obtidos deram origem a animações na forma de vídeos. Por meio de uma premissa, simulamos computacionalmente a dinâmica do movimento da *Vorticella* sp: estipulamos o número de partículas que passam por uma unidade de área próxima à *Vorticella*. Se o número de partículas for menor que o estipulado, *Vorticella* sp. muda a direção de movimento da associação como um todo. Realizamos as simulações em ambientes com diferentes concentrações de alvos e comparamos nossas animações com dados experimentais.

No capítulo 5 um modelo de estratégias de Lévy combinadas é apresentado. Por meio de uma soma de duas distribuições de probabilidade de Lévy, uma descrevendo a estratégia de busca balística $\mu = 1,1$ e outra otimizando a estratégia de busca $\mu = 2,0$, investigamos se a soma das estratégias descreve a estratégia de Lévy usual, com expoente $\mu = 1,5$. Atribuímos à soma das distribuições um peso estatístico ω , que descreve a porcentagem de utilização

de determinada estratégia de busca. Verificamos para qual valor do parâmetro ω ocorre o melhor ajuste entre as duas distribuições, a soma e a usual. Empregamos o teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov aos conjuntos de dados obtidos para validar a hipótese de que os valores das duas amostras, da distribuição combinada e da distribuição usual, pertencem à mesma população. Por fim, nossas conclusões são apresentadas no capítulo 6.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

O objetivo principal deste capítulo é tratar de alguns tópicos essenciais para o entendimento dos modelos a serem apresentados nesta tese. Para este fim, dividimos este capítulo em duas partes: conceitos básicos da teoria de probabilidades e aspectos da busca aleatória. A abordagem dos conceitos básicos da teoria de probabilidades começará pelo conceito de variáveis aleatórias. Em seguida definiremos o conceito de processo estocástico e demonstraremos um dos principais teoremas da teoria de probabilidades: o teorema do limite central. Conceitos fundamentais da teoria de probabilidades, tais como, estimadores, estatística não paramétrica, e testes de hipóteses, também serão discutidos. O formalismo matemático das caminhadas de Lévy é apresentado baseado nas distribuições α -estáveis de Lévy, e algumas propriedades matemáticas decorrente desse formalismo, são destacadas. Finalmente, é estabelecida a conexão entre caminhadas de Lévy e o forrageamento animal por meio do modelo de busca aleatória.

2.1 Variáveis Aleatórias

A teoria clássica das probabilidades¹ estabelece uma variável aleatória como uma regra definida em um espaço amostral [12]. Essa definição é semelhante àquela da função apresentada nos livros de cálculo, em que y é uma função do número real x se para cada valor de x , houver um correspondente valor de y . Se o espaço amostral for discreto, a variável aleatória será do tipo discreta, como, por exemplo, o número de seis, obtidos após n lançamentos de um dado, o número de caras (ou de coroas) obtidos após o lançar n vezes uma moeda ou o número de “ases”, em uma mão, em um jogo de pôquer. Se o espaço amostral for não discreto, a variável aleatória é do tipo contínua. A posição de uma partícula sujeita à difusão, valores de corrente elétrica em um cabo e flutuações de temperatura em

¹ Quando nos referimos a teoria clássica das probabilidades, nos referimos ao período histórico conhecido como *período de maturação da probabilidade clássica*, cujo marco foi a publicação da obra “*Ars Conjectandi*” de J. Bernoulli, no século XVII, até o período histórico marcado pela escola de São Petesburgo, fundada por Chebyshev no final do século XIX.

um dado sistema físico, são exemplos de variáveis aleatórias contínuas.

A rigor, a teoria clássica de probabilidades [12, 13] considera mais apropriado o termo função aleatória, ao invés de variável aleatória. Isso porque considerando o termo “variável aleatória” daria margem a interpretar o termo “variável” como um ponto no espaço amostral, o que seria, na verdade, o resultado de um experimento. Introduzimos abaixo as definições de variável aleatória discreta e contínua e suas respectivas distribuições.

2.1.1 Variável aleatória discreta e sua distribuição de probabilidades

Uma variável aleatória ℓ será do tipo discreta se ela for enumerável. Se, além disso, for possível associar um número real não negativo à variável ℓ ,

$$P_\ell \geq 0, \quad (2.1)$$

tal que

$$\sum_{\ell} P_\ell = 1, \quad (2.2)$$

então, ℓ é uma variável aleatória discreta, P_ℓ é a sua distribuição de probabilidades e a Eq.2.2, define a condição de normalização da distribuição P_ℓ .

Um exemplo de uma distribuição de probabilidades discreta é a conhecida distribuição binomial

$$P_\ell = \binom{N}{\ell} p^\ell q^{N-\ell}, \quad (2.3)$$

em que p e q são parâmetros da distribuição, tal que, $0 < p < 1$ e $q = 1 - p$, e

$$\binom{N}{\ell} = \frac{N!}{\ell!(N-\ell)!} \quad (2.4)$$

é o coeficiente binomial que descreve a combinação das N variáveis aleatórias tomadas ℓ a ℓ .

2.1.2 Variável aleatória contínua e a função densidade de probabilidades

Uma variável aleatória contínua é uma função que pode assumir qualquer valor contido na reta dos números reais. Dessa forma, sua distribuição de probabilidade em um dado intervalo $[a, b]$ é

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx, \quad (2.5)$$

onde $f_X(x)$ é a função densidade de probabilidade da variável aleatória contínua X , que deve possuir as seguinte propriedades

$$f_X(x) \geq 0, \quad (2.6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1. \quad (2.7)$$

Convém notar que $f_X(x)$ não é a probabilidade de ocorrência de um dado evento. A densidade de probabilidade é uma função matemática que auxilia à atribuição de uma probabilidade. A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua é dada pela solução da Eq.2.5, em um dado intervalo. Como exemplo de uma densidade de probabilidades, temos a conhecida distribuição gaussiana

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2-\mu}{2\sigma^2}}, \quad (2.8)$$

na qual, μ e σ descrevem, respectivamente, o primeiro e o segundo momento da densidade de probabilidade $\rho(x)$.

2.1.3 Momentos de variáveis aleatórias

Seja X uma variável aleatória enumerável, isto é, uma variável aleatória discreta. O n -ésimo momento da distribuição de X é definido como

$$E[X^n] = \langle X^n \rangle = \sum_i x_i^n P(x_i), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

Na qual, $P(x_i)$, é a distribuição de probabilidades da variável X . Na Eq. 2.9, se $n = 1$ temos o primeiro momento da variável X (também conhecido como esperança de X ou valor médio). Se $n = 2$ temos o segundo momento ou a variância de X .

Para uma variável aleatória contínua, com uma função densidade de probabilidades $f(x)$, o n -ésimo momento é definido como

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

Na equação acima, $n = 1$ define o primeiro momento ou esperança de X , e $n = 2$ define a variância em relação a origem, isto é, para o caso em que, $E[X] = 0$.

No caso em que $E[X] \neq 0$ o n -ésimo momento em relação à média é definido como

$$E[(X - \langle X \rangle)^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle X \rangle)^n f_X(x) dx. \quad (2.11)$$

Para $n = 0$, o momento de ordem zero é igual a 1, e representa a probabilidade total. Utilizando a propriedade da função densidade de probabilidade, expressa na Eq. 2.7, é fácil ver que o primeiro momento centrado no valor médio, é zero. Para $n = 2$ temos a variância dada por

$$\sigma^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2. \quad (2.12)$$

Os momentos de uma distribuição, em teoria de probabilidade, são quantidades que descrevem uma população [14]. Em estatística, o conceito de população representa o grande conjunto de dados que contém a característica de interesse. Por exemplo, se queremos saber a altura média das mulheres entre vinte e trinta anos, que vivem no Brasil, a população

será todas as mulheres, dentro da faixa etária desejada, que vivem no país. Evidente que, dependendo da característica de interesse que se deseja observar, haverá dificuldades para se observar todos os elementos da população. Para contornar esse problema, retira-se da população um número suficiente de dados, formando um subconjunto da população que, em estatística, recebe o nome de amostra.

Em teoria de probabilidade e em estatística, fenômenos aleatórios são situações ou acontecimentos cujos resultados não podem ser previstos com certeza. As distribuições de probabilidade descrevem o comportamento dos fenômenos aleatórios e os momentos de uma distribuição são, portanto, parâmetros que definem a forma de uma distribuição de probabilidade. O primeiro momento descreve o valor em torno do qual as variáveis aleatórias se distribuem. A variância, também chamada de dispersão do primeiro momento, fornece uma medida do quanto os valores que se distribuem em torno da média, se distanciam desta. Por exemplo, o terceiro momento fornece uma medida de assimetria da distribuição em relação a média e o quarto momento que se relaciona a curtose, fornece uma medida do comportamento da cauda de uma dada distribuição.

Esses parâmetros são calculados estabelecendo uma relação entre os elementos de uma amostra. Esta relação recebe o nome de estimador e o resultado fornecido por meio dessa relação é, obviamente, uma estimativa. Por exemplo, a Eq. 2.12 constitui, desse modo, um estimador da dispersão da média de uma determinada amostra. Por sua vez, sabendo o valor estimado do quadrado do valor médio e do valor médio ao quadrado, podemos obter a estimativa da dispersão e, finalmente, a forma da distribuição de probabilidade. Uma vez que o estimador é uma função das variáveis aleatórias que constituem uma dada amostra, o estimador também será, portanto, uma variável aleatória.

2.1.4 Distribuição acumulada de probabilidades

A função distribuição acumulada de probabilidades de uma variável aleatória X , calculada para um dado número real x , é a probabilidade de X assumir valores menores ou iguais a x , e é definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2.13)$$

Para uma variável aleatória discreta, a distribuição acumulada de probabilidades é definida como

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i), \quad (2.14)$$

que é a função massa de probabilidades. Para uma variável aleatória contínua, a distribuição acumulada é definida por meio da função densidade de probabilidade

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx. \quad (2.15)$$

Qualquer função distribuição acumulada obedece as seguintes propriedades:

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2. $F_X(x)$ é não decrescente: se $x_1 < x_2$ então $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
5. $P(a < x < b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Chamamos a atenção para a semelhança entre a Eq. 2.15 e a propriedade da função densidade, expressa na Eq. 2.7. Geralmente, em estatística, é preferível o uso do termo função distribuição acumulada de probabilidade, mas o adjetivo “acumulada” é, de certa forma, considerado redundante. Uma função densidade é uma função $f(x)$ não-negativa, cuja integral, sobre todo o eixo dos x é igual a 1. A integral de $-\infty$ a x , de qualquer função densidade é uma função distribuição. Um termo mais antigo utilizado, que é considerado sinônimo de função densidade, é o termo função de frequência [15].

Desse modo, a função densidade pode ser também interpretada como a distribuição de frequência de ocorrência de um determinado valor de x , associado a variável aleatória X . Se dividirmos a função massa, expressa pela Eq. 2.14, pelo número total de n valores (independentes e identicamente distribuídos) de uma dada amostra, obteremos

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_{[-\infty, x]}(x_i), \quad (2.16)$$

que é conhecida como distribuição de frequência relativa acumulada empírica. O adjetivo empírico, na maioria dos casos, se refere a um conjunto de valores de uma variável que foi observado e que está sendo discutido. Em muitos casos, dado a obviedade do termo, o adjetivo empírico é suprimido.

A frequência relativa do valor de uma variável aleatória é a proporção de vezes que o seu valor ocorre. Geralmente o contexto evidencia que uma distribuição de frequência empírica está envolvida na estatística. Da mesma forma, muitos autores omitem o adjetivo relativo, de modo que “distribuição de frequência” é uma abreviação de “distribuição de frequência relativa empírica”.

Em suma, a distribuição de frequência relativa fornece informações acerca da proporção (ocorrência) de um determinado valor, relativo ao número total de valores observados enquanto que a distribuição de frequência relativa acumulada, fornece informações sobre a proporção de observações menores ou iguais àquele valor.

A Eq. 2.16 é uma função do tipo degrau (ou salto) cuja a altura do degrau (ou salto) mede $1/n$ e ocorre sempre nos valores da amostra. A seguir, damos um exemplo de como a Eq. 2.16 é utilizada na construção de um gráfico. Suponha que cinco alunos de uma escola de ensino médio foram selecionados ao acaso para que fossem medidos os seus respectivos pesos para um dado estudo de aptidão física. Os valores de seus pesos (em fração de quilogramas)

foram: 67,85; 73,27; 64,33; 60,94 e 80,05. A figura 2.1 mostra o gráfico da distribuição de frequência relativa.

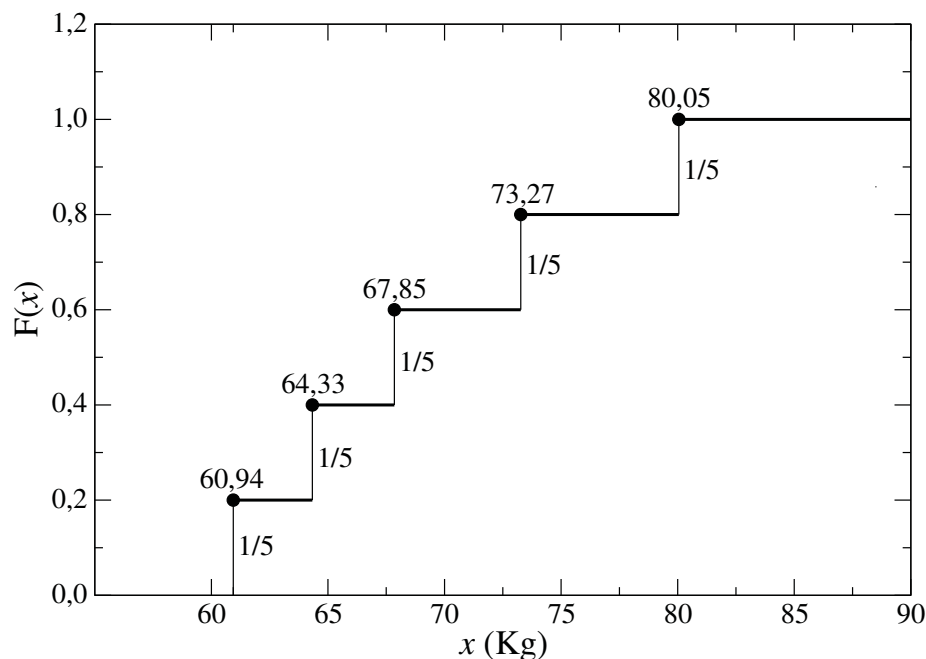


Figura 2.1 – Função distribuição de frequência acumulada para o peso dos alunos em um determinado teste de aptidão física. A função é do tipo degrau cujo o tamanho de cada degrau é $1/5$. Para valores menores do que o menor valor da amostra $F(x) = 0$. Para valores maiores do que o maior valor da amostra $F(x) = 1$. A cada ocorrência dos n valores da amostra, $F(x)$ dá um salto de altura $1/5$.

Na figura 2.1, as linhas horizontais, destacadas propositalmente, são os valores da distribuição de frequência empírica. As linhas verticais não fazem parte da função de distribuição, mas são incluídas em partes por causa da aparência do gráfico e em partes para facilitar a determinação dos quantis da amostra.

Note que o gráfico da função de distribuição empírica, da esquerda para a direita, mostra que $F(x)$ é igual a zero para valores de x menores do que o menor valor da amostra (propriedade 3). No menor valor da amostra $F(x)$ dá um passo de $1/n$ de altura. A cada um dos n valores da amostra, $F(x)$ cresce uma altura de $1/n$.

No ponto em que se encontra o maior dos valores da amostra, $F(x)$ atinge uma altura de 1,0 e mantém esse comportamento para todos os demais valores maiores do que x (propriedade 4). A figura 2.1 representa somente uma observação. Uma outra amostra teria produzido um gráfico diferente para $F(x)$. Isso é um indicativo da natureza aleatória de $F(x)$ [16]. Desse modo, a função distribuição acumulada de frequência é utilizada como um bom estimador para a distribuição de probabilidade da variável aleatória X .

2.1.5 Função característica

Seja X uma variável aleatória contínua. Se $f_X(x)$ é função densidade de probabilidade da variável X , então, a função característica $G_X(k)$ associada a variável X é definida como a transformada de Fourier da função densidade de probabilidade

$$G_X(k) = \langle e^{ikx} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f_X(x) dx. \quad (2.17)$$

A função característica possui as seguintes propriedades:

1. $G_X(0) = 1$, $|G_X(k)| \leq 1$ para todo k ;
2. $G_X^*(k) = G_X(-k) = G_{-X}(k)$, onde o símbolo $*$ significa o complexo conjugado. Se X é simétrica em relação ao zero, $X \stackrel{d}{=} -X$, então a função característica tem valor real e vice-versa;
3. Dado duas constantes a e b , $G_{aX+b}(k) = e^{ikb} G_X(ak)$
4. Se S_n é a soma de variáveis aleatórias independentes $X_1 + \dots + X_n$ então, $G_{S_n}(k) = G_{X_1}(k) \dots G_{X_n}(k)$.
5. $G_X(k)$ é uniformemente contínua.

Esta função é útil na obtenção dos momentos $\langle X^n \rangle$. Expandido $G_X(k)$ em série de Taylor (quando a expansão da função densidade existe) obtém-se,

$$G_X(k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle X^n \rangle. \quad (2.18)$$

A função característica sempre existe. No entanto, nem sempre é possível obter sua expansão em série de Taylor, o que indica que a distribuição de probabilidade não possui momentos [17].

2.2 Processos Aleatórios

Nesta seção definiremos o conceito de processos aleatórios. Trataremos por descrever algumas das classificações dos processos aleatórios, abordando os principais tipos de processos aleatórios. O intuito é caracterizar, de modo claro e sucinto, os processos de Lévy. O conceito de processo aleatório é baseado na extensão do conceito de variáveis aleatórias para incluir, agora, um outro parâmetro denotado por t . Desde que, por definição, uma variável aleatória é uma função que descreve todos os possíveis resultados de X , a variável aleatória será agora uma função de duas variáveis, isto é, $X = X(t, x)$.

Um processo aleatório é uma família de variáveis aleatórias $\{X(t), t \in T\}$ definidas em um espaço de probabilidades e indexado por um parâmetro t , no qual t varia no conjunto T . Uma vez que t é um parâmetro, o conjunto T é chamado de espaço de parâmetros e os valores assumidos por $X(t)$ são chamados de estados. Ao conjunto de todos os possíveis

estados dá-se o nome de espaço de estados do processo aleatório e denota-se esse espaço por \mathcal{S} . Logo, um processo aleatório é definido como uma família de estados $\{p(X(t)), X(t) \in \mathcal{S}\}$, em que p denota o processo aleatório que varia no conjunto \mathcal{S} .

Quando o parâmetro t significa o tempo, $X(t)$ é uma variável estocástica [17]. Desse modo, um processo estocástico é uma família de variáveis estocásticas e, assim, podemos inferir que todo o processo estocástico é um processo aleatório mas nem todo processo aleatório é um processo estocástico. Considerando que uma variável aleatória é uma função definida em um espaço amostral Ω , então, um processo estocástico é uma função de dois argumentos $\{X(t, x), t \in T, x \in \Omega\}$. Se considerarmos $t = t_0$ fixo, teremos $X(t_0, x) = X_{t_0}(x) = X(t_0)$, uma vez que x varia no espaço amostral Ω . Por outro lado, fixando $x = x_0$, teremos agora, $X(t, x_0) = X_{x_0}(t)$ que é uma função somente do tempo. Cada função $X(t)$ recebe o nome de função amostra, membro do conjunto (conjunto T) ou realização do processo [18]. Note que, se ambas as variáveis forem consideradas fixas, $t = t_0$ e $x = x_0$, então, $X(t_0, x_0)$ é um número real.

De acordo com o comportamento de t e da variável estocástica $X(t)$ em relação ao tempo, é possível classificar, de um modo geral, os processos estocásticos de acordo com os espaços onde as variáveis são definidas. Se o espaço de parâmetros é um conjunto discreto, então o processo é denominado processo estocástico discreto e pode ser, também, chamado de sequência aleatória. Por outro lado, se o conjunto T for constituído de valores contínuos, o processo será chamado de processo estocástico contínuo. Se o espaço de estados é discreto, o processo é dito ser um processo de estado discreto e é, também, conhecido como cadeia. Se o espaço \mathcal{S} é contínuo, o processo estocástico é chamado de sequência aleatória contínua.

Passaremos agora, à caracterização dos processos aleatórios. Um processo estocástico $X(t)$, é dito ser estacionário para um subconjunto do espaço de parâmetros $\{t_i \in T, \text{ com } i = 1, 2, \dots, n\}$ se, dada a função distribuição acumulada conjunta $F_X(x_n, t_n)$, que é definida como $F_X(x_n; t_n) = P[X(t_n) \leq x_n]$, tem-se:

$$F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F_X(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau), \quad (2.19)$$

para qualquer valor de τ . A Eq. 2.19 explicita que a distribuição acumulada do processo estocástico, descrito por $X(t)$, não muda sob uma translação em relação a origem do tempo. Em outras palavras os estados $X(t)$ e $X(t + \tau)$ são descritos pela mesma distribuição acumulada de probabilidade para qualquer valor de τ . De um modo geral, um processo estocástico pode ser considerado estacionário quando todas as suas propriedades estatísticas, tais como, sua média, variância, distribuição acumulada, etc., não variam em relação ao tempo.

Um processo estocástico $X(t_i)$ com $i = 1, 2, \dots, n$, é dito independente se a sua função distribuição acumulada conjunta, obedece a seguinte condição

$$F_X(x_n; t_n) = F_X(x_1; t_1)F_X(x_2; t_2), \dots, F_X(x_n; t_n) = \prod_{i=1}^n F_X(x_i; t_i). \quad (2.20)$$

A Eq. 2.20 informa que a independência de um processo estocástico exige que a sua distribuição acumulada conjunta mantenha a sua fatorabilidade.

Se para quaisquer n instantes de tempo $0 < t_1 < t_2, \dots, < t_n$, o conjunto de variáveis aleatórias representadas por $X(t=0)$, $X(t_1) - X(0)$, $X(t_2) - X(t_1)$, \dots , $X(t_n) - X(t_{n-1})$, forem independentes, então, o processo $\{X(t), t \geq 0\}$, é dito ser um processo estocástico com incrementos independentes. Agora, se $\{X(t), t \geq 0\}$ é um processo com incrementos independentes e, além disso, a variável aleatória $X(t) - X(s)$ possuir a mesma distribuição de probabilidade que $X(t+h) - X(s+h)$ para todo $s, t, h \geq 0$ com $s < t$, então, o processo é dito ter incrementos independentes e estacionários. A seguir, tendo por base a classificação e caracterização dos processos estocásticos, definiremos três processos bastante conhecidos na teoria das probabilidades.

2.2.1 Processos Brownianos

Seja um processo contínuo $\{B(t), t \geq 0\}$ definido no espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Um processo estocástico $B(t)$, é dito ser um processo estocástico Browniano se possuir as seguintes propriedades:

1. $B(0) = 0$, isto é, a probabilidade $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$;
2. para $0 \leq s \leq t$, $B(t) - B(s)$ é igual a distribuição $B(t - s)$;
3. para $0 \leq s \leq t$, $B(t) - B(s)$ é independente de $\{B(u), u \leq s\}$;
4. para cada $t > 0$, $B(t)$ é um processo estocástico que obedece a uma distribuição Normal com variância t .

2.2.2 Processos de Poisson

Um processo estocástico discreto $\{N(t), t \geq 0\}$, definido no espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, é dito ser um processo de Poisson se possuir as seguintes propriedades:

1. N é um processo estocástico discreto;
2. $N(0) = 0$, isto é, a probabilidade $\mathbb{P}(N_0 = 0) = 1$;
3. para $0 \leq s \leq t$, $N(t) - N(s)$ é igual a distribuição $N(t - s)$;
4. para $0 \leq s \leq t$, $N(t) - N(s)$ é independente de $\{N(u), u \leq s\}$;
5. para cada $t > 0$, $N(t)$ é um processo estocástico que obedece a uma distribuição de Poisson com parâmetro λt .

2.2.3 Processos de Lévy

Seja um processo estocástico $\{\mathcal{L}(t), t \geq 0\}$ definido no espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Um processo $\{\mathcal{L}(t), t \geq 0\}$, é dito ser um processo de Lévy se possuir as seguintes propriedades:

1. \mathcal{L} é um processo estocástico com tempo contínuo;
2. $\mathcal{L}(0) = 0$, isto é, a probabilidade $\mathbb{P}(\mathcal{L}_0) = 1$;
3. para $0 \leq s \leq t$, $\mathcal{L}(t) - \mathcal{L}(s)$ é igual a distribuição $\mathcal{L}(t - s)$;
4. para $0 \leq s \leq t$, $\mathcal{L}(t) - \mathcal{L}(s)$ é independente de $\{\mathcal{L}(u), u \leq s\}$;

Na teoria das probabilidades, um processo de Lévy é qualquer processo estocástico de tempo contínuo que começa em zero e possui incrementos independentes e estacionários. Vemos que as propriedades que descrevem um processo de Lévy, enumeradas acima, abrangem em si, os processos Brownianos e de Poisson.

2.3 Teorema Central do Limite

O Teorema Central do Limite afirma que a soma de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, com média μ e desvio padrão σ , tende a se aproximar de uma distribuição de probabilidade normal com média $n\mu$ e desvio padrão $\sigma\sqrt{n}$, à medida que n se torna suficientemente grande. Pierre-Simon de Laplace, no início do século XIX, “observou” o Teorema Central do Limite, primeiramente, como uma propriedade das variáveis aleatórias que as relacionava à distribuição normal [19].

Georg Pólya em 1935, em um artigo intitulado: “*Sobre o Teorema Central do Limite do cálculo de probabilidades e o problema de localização*”², foi quem utilizou pela primeira vez o termo “Teorema Central do Limite” para denominar essa propriedade das variáveis aleatórias, mostrando que, o adjetivo “Central”, se refere ao teorema e não ao limite. Desse modo, em um sentido etimológico, o Teorema Central do Limite é um teorema e portanto, passível de demonstração. É central porque tem como o seu parâmetro, a média e o desvio padrão de suas variáveis e é um teorema limite porque suas propriedades emergem de convergências [20].

A seguir, apresentamos uma das formas de se provar o Teorema Central do Limite, tendo como base o teorema da continuidade de Lévy. Os enunciados dos teoremas bem como suas respectivas provas, foram extraídos de [21].

Teorema 2.3.1. (Teorema da continuidade de Lévy): *Seja F_n , $n \geq 1$ um conjunto de funções distribuições com suas respectivas funções características G_n , com $n \geq 1$. Se*

² Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Homomentenproblem.

$F_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F$, nos pontos de continuidade de F , então $G_n(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(k)$, para todo $k \in \mathbb{R}$, e G é a função característica correspondente a F . Por outro lado, se $G_n(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(k)$, para $k \in \mathbb{R}$ é uma função contínua em $k = 0$, então $G(k)$ é a função característica de uma função densidade de probabilidade F .

Teorema 2.3.2. (Teorema Central do Limite): Seja $X_n (n \geq 1)$ um conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Além disso, X_n possui valor médio μ e variância σ^2 tal que, $(0 < \sigma^2 < \infty)$. Então, dada a soma $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, temos:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \longrightarrow N(0, 1). \quad (2.21)$$

Demonstração. Podemos definir uma variável aleatória $Y_n = X_n + \mu$ tal que, Y_n tem $\mu = 0$. Utilizando as propriedades da função característica, listada anteriormente, podemos escrever a função característica para $S_n/\sigma\sqrt{n}$. Desse modo, segue:

$$G_{S_n/\sigma\sqrt{n}}(k) = G_{S_n}(k/\sigma\sqrt{n}) = \prod_{i=1}^n G(k/\sigma\sqrt{n}) = [G(k/\sigma\sqrt{n})]^n. \quad (2.22)$$

Expandindo em série de Taylor até os termos de segunda ordem,

$$G(k/\sigma\sqrt{n}) = G(0) + \frac{k}{\sigma\sqrt{n}}G'(0) + \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\sigma\sqrt{n}} \right)^2 G''(0) + \mathcal{O} \left(\frac{k^2}{n} \right) \quad (2.23)$$

De acordo com as propriedades de $G(k)$, temos $G(0) = 1$, $G'(0) = i\mu = 0$ e $G''(0) = -\sigma^2$. Aplicando estas propriedades à equação Eq. 2.23, segue

$$G(k/\sigma\sqrt{n}) = 1 - \frac{k^2}{2n} + \mathcal{O} \left(\frac{k^2}{n} \right) = 1 - \frac{k^2}{2n} \left[1 - \frac{\mathcal{O} \left(\frac{k^2}{n} \right)}{\frac{k^2}{n}} \right]. \quad (2.24)$$

Lembrando que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(x)}{x} = 0$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\mathcal{O} \left(\frac{k^2}{n} \right)}{\frac{k^2}{n}} \right] = 1, \quad (2.25)$$

E aplicando o limite notável

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a_n}{n} \right)^n = e^{-a}, \quad (2.26)$$

obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G(k/\sigma\sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{k^2}{2n} \left[1 - \frac{\mathcal{O}(k^2/n)}{k^2/n} \right] \right\}^n = e^{-k^2/2}. \quad (2.27)$$

Podemos observar, por meio da Eq. 2.27 que o limite da função é a função característica da distribuição normal. De acordo com o teorema da continuidade de Lévy, a convergência da função característica na Eq. 2.27, implica na convergência das distribuições. Desse modo, temos.

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \longrightarrow N(0, 1) \quad (2.28)$$

□

2.4 Aproximação de Campo Médio

Nesta seção discutiremos sobre um dos principais métodos de aproximação para a solução de sistemas com muitas partículas interagentes: a aproximação de campo médio. Um dos grandes problemas em modelos probabilísticos é a enorme complexidade envolvida em cálculos de grandezas de interesse quando o sistema possui grande número de variáveis aleatórias e, possivelmente, multivariadas distribuições de probabilidade. Outro complicador são as interações mútuas entre todos os constituintes do sistema, o que pode gerar potenciais locais de difícil solução analítica e mesmo numérica.

Entretanto, existem situações onde tratamentos analíticos são factíveis. Um exemplo extremamente relevante é aquele onde o sistema apresenta interações locais que podem ser consideradas espacialmente homogêneas. Este é o caso quando as energias de interação dos constituintes são inversamente proporcionais aos seus tamanhos [22]. Em tais contextos a aproximação de campo médio tem sido amplamente usada no modelamento de processos de Markov tais como, transição de fase em plasma [23] e propriedades do estado fundamental de gás de Bose [24].

A ideia geral da aproximação de campo médio consiste em substituir a influência mútua entre as variáveis aleatórias que descrevem o sistema por um campo efetivo [25]. Em outras palavras, o método consiste em focar em uma partícula do sistema e assumir que as partículas de uma vizinhança delimitada exercem influência por meio de um potencial médio [26]. Com isso, a aproximação de campo médio despreza os efeitos de flutuações que se estendem além do comprimento de escala pré-fixado, como por exemplo, o número de partículas que constituem os primeiros vizinhos da partícula em questão. O método considera somente aquelas flutuações que ocorrem dentro de uma vizinhança específica, transformando, com isso, um problema de muitos corpos em um problema de um só corpo.

Por se tratar de uma aproximação, é evidente que pode falhar ao descrever sistemas em determinadas configurações. Em particular, para problemas que exibem transições de fase contínuas, tais como modelo de Ising [27], e que se encontram próximos à criticalidade, a aproximação de campo médio falha ao descrever o comportamento de grandezas importantes do sistema, como, por exemplo, o parâmetro de ordem. Isto se dá porque nas proximidades do ponto crítico, o comprimento de correlação diverge, assumindo um comportamento do tipo lei de potência. Desse modo, sistemas em que há flutuações em todos os comprimentos de escala, não são bem descritos por uma aproximação de campo médio [28].

Do ponto de vista matemático, há diferentes tipos de aproximações de campo médio. Uma possibilidade é o Método de Campo Médio Variacional [29], que procura aproximar uma distribuição de probabilidade difícil de tratar, $P(\mathbf{S})$ de um vetor de variáveis aleatórias $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_N)$, por meio de uma escolha conveniente de uma distribuição de probabilidade $Q(\mathbf{S})$. Nesse caso, a distribuição Q pertence a uma família de distribuições \mathcal{M} , solúveis. A escolha conveniente de $Q(\mathbf{S})$ visa diminuir uma certa distância medida $D(Q, P)$, dentro da

família \mathcal{M} . Em suma, $Q(\mathbf{S})$ se torna uma aproximação (média) para $P(\mathbf{S})$, semelhante a aproximação usada no princípio variacional.

A seguir, daremos um exemplo de aplicação da aproximação de campo médio. Considere um sistema de N spins distribuídos ordenadamente em uma rede. Na presença de um campo magnético, H , a energia do sistema, em um dado estado ϵ , é dada pela Hamiltoniana

$$\mathcal{H}_\epsilon = - \sum_{n=1}^N H \mu s_i + (\text{energia devido à interações entre os spins}), \quad (2.29)$$

na qual, $s_i = \pm 1$. Um modelo simples para a energia de interação é

$$-J \sum_{ij} s_i s_j, \quad (2.30)$$

onde J , representa a constante de acoplamento e a soma se estende a todos os pares de spins, primeiros vizinhos. Um sistema de spins com essa energia de interação é conhecido como *Modelo de Ising*. Quando $J > 0$, o sistema é considerado energeticamente favorável para o alinhamento dos spins da vizinhança. Por isso, no regime de baixas temperaturas, a estabilização no alinhamento dos spins leva a um fenômeno cooperativo chamado, magnetização espontânea. Em outras palavras, por meio da interação entre os primeiros vizinhos, o momento magnético pode influenciar o alinhamento dos spins que estão separados de um dado spin por uma distância macroscópica.

Para começar a análise de campo médio reescrevemos a Hamiltoniana do sistema na forma

$$\mathcal{H}_\epsilon = -H\mu \sum_{n=1}^N s_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} s_i s_j, \quad (2.31)$$

onde

$$\begin{aligned} J_{ij} &= J, \text{ se } i \text{ e } j \text{ são primeiros vizinhos} \\ J_{ij} &= 0, \text{ caso contrário.} \end{aligned} \quad (2.32)$$

A força exercida sobre s_i devido aos spins vizinhos e ao campo externo, H , é

$$-\frac{\partial \mathcal{H}_\epsilon}{\partial s_i} = \mu H + \sum_j J_{ij} s_j. \quad (2.33)$$

Portanto, o campo magnético, no instante de tempo, ao qual o i -ésimo spin está submetido é dado por

$$\mu H_i = \mu H + \sum_j J_{ij} s_j. \quad (2.34)$$

Conforme os spins da vizinhança flutuam, H_i flutua em torno do seu valor médio, isto é,

$$\langle H_i \rangle = H + \frac{\sum_j J_{ij} \langle s_j \rangle}{\mu} \quad (2.35)$$

$$\langle H_i \rangle = H + \frac{Jz \langle s_i \rangle}{\mu}. \quad (2.36)$$

Convém notar que, no modelo de Ising, $\langle s_i \rangle = \langle s_j \rangle$, para todo i e j e z representa o número de primeiros vizinhos em torno do spin em questão. São as flutuações de H , longe do seu valor médio, que acoplam as flutuações do spin observado aos demais contidos no ambiente, conforme informado pela Eq. 2.36. Do fato da aproximação de campo médio desprezar flutuações de H_i substituindo-a por $\langle H_i \rangle$, a força sobre o spin observado é independente das configurações instantâneas dos spins vizinhos como descrito pela Eq. 2.36, portanto homogêneo no espaço.

No capítulo 2 iremos fazer uma aproximação de campo médio, ou seja, iremos supor que um livre caminho médio local (que efetivamente depende da localização espacial do caminhante aleatório) pode ser aproximado por uma constante válida em todo o espaço.

2.5 Caminhada Aleatória

A teoria das caminhadas aleatórias foi desenvolvida de forma independente e interdisciplinar. Na teoria das probabilidades os ensaios de Bernoulli (1713) descrevem uma caminhada aleatória unidimensional com probabilidade p do caminhante avançar e $1 - p$, de recuar [30]. No contexto da Biologia, as caminhadas aleatórias aparecem nas observações de Richard Brown (1828) acerca do movimento das partículas de pólen em um meio líquido [2]. Na física, Rayleigh, em 1880, utilizando a Lei dos grandes números, calculou a distribuição de probabilidade da intensidade resultante das vibrações de ondas sonoras, mostrando que a intensidade resultante possui distribuição Gaussiana, distribuição de probabilidade que caracteriza o movimento Browniano [31].

Mas foi com Einstein [3], em 1905, e Smoluchowski [32], em 1906, que a teoria das caminhadas aleatórias passou a ter uma abordagem quantitativa mais rigorosa, conectando a dinâmica das partículas microscópicas aos processos macroscópicos de difusão. No mesmo ano em que Einstein apresenta o modelo matemático que descreve o fenômeno observado por Brown, o problema da caminhada aleatória é proposto por Karl Pearson em uma carta dirigida ao periódico *Nature*, propondo o termo Caminhada Aleatória por meio do seguinte problema [1]:

Um homem parte de um ponto 0 e caminha ℓ jardas em linha reta; ele então muda de direção por meio de um ângulo qualquer e anda mais ℓ jardas em linha reta. Ele repete este processo n vezes. Pergunto qual é a probabilidade de após n caminhadas ele estar a uma distância r e $r + \delta r$, do seu ponto de partida³.

Pearson, desse modo, propõe um problema de caminhada aleatória simples: uma caminhada aleatória em duas dimensões com direção isotrópica e comprimento de passos, fixo. Atualmente, modelos mais complexos de caminhadas aleatórias foram desenvolvidos levando em conta mais de duas dimensões, fractalidade e memória [21]. Contudo, problemas

³ Tradução do próprio autor

de otimização de busca, utilizando modelos de caminhadas aleatórias, tiveram seu desenvolvimento somente na década de 60. Em 1966 propôs um modelo de relação entre a preferência alimentar ótima⁴ e a perda calórica por unidade de tempo de predadores, mostrando que as suas preferências alimentares, e portanto, a busca que estes empreendem, mudam de maneira rápida para se adequarem às mudanças do ambiente [33].

Neste mesmo ano, MacArthur *et. al* [34] apresentam um método gráfico, especificando a dieta ideal de um predador em termos da quantidade líquida de energia obtida com a captura da presa, em comparação com a energia gasta na busca por presas. O método mostrou que um ambiente mais produtivo leva a uma dieta mais restrita no número de diferentes espécies consumidas, isto é, em um ambiente com uma maior diversidade de presas o predador se alimentará de um número específico de espécies.

2.5.1 Movimento Browniano

O movimento Browniano é um movimento descrito por um processo estocástico Browniano. É caracterizado pela distribuição binomial se o número de passos for discreto, ou por uma distribuição Normal caso o número de passos dados pelo caminhante seja suficientemente grande. Na seção sobre variáveis aleatórias discretas, demos a distribuição binomial como exemplo de distribuição de probabilidade de uma variável discreta. A seguir, deduziremos que a distribuição de probabilidade para a caminhada aleatória unidimensional é uma distribuição binomial. Tal distribuição possui diversas aplicações em processos de difusão.

Considere um caminhante aleatório que, ao longo do tempo, dá passos sempre de tamanhos iguais. A cada intervalo de tempo τ , o caminhante dá um passo para a direita com probabilidade p ou com probabilidade $q = 1 - p$, dá um passo para a esquerda. No tempo 0 a caminhada começa na origem do sistema de coordenadas, e as posições são identificadas por números inteiros m . Queremos saber qual é a probabilidade do caminhante estar na posição m após $n\tau$ instantes de tempo. Definindo n_1 como o número de passos para a direita e n_2 o número de passos para a esquerda, com $n_1 + n_2 = N$. Para o caminhante alcançar a posição m ele tem que dar $n_1 = m - n_2$ passos para a direita e n_2 passos para a esquerda. Desse modo, o caminhante realizou

$$n_1 = \frac{1}{2} (N + m) \text{ passos para a direita}$$

$$n_2 = \frac{1}{2} (N - m) \text{ passos para a esquerda.}$$

A probabilidade de uma sequência de passos para esquerda e para a direita é o produto das probabilidades individuais dos passos. Uma vez que os passos são independentes todas as possibilidades de o caminhante sair da origem e chegar em m , após $N = n_1 + n_2$, tem a mesma probabilidade. Disso segue que, a probabilidade de o caminhante dar n_1 passos

⁴ *optimal food preference*

para a direita é n_1 fatores de p e de dar n_2 passos para a esquerda é n_2 fatores de q . Logo,

$$p^{n_1} q^{n_2} = p^{\frac{1}{2}(N+m)} q^{\frac{1}{2}(N-m)}. \quad (2.37)$$

A probabilidade enunciada pela Eq. 2.37, ainda deve ser multiplicada pelas diferentes maneiras possíveis de o caminhante dar N passos, com n_1 deles para a direita e n_2 para a esquerda. O número total de maneiras distinguíveis para escolher n_1 passos para a direita e n_2 passos para a esquerda é

$$\frac{N!}{n_1! n_2!} = \frac{N!}{n_1! (N - n_1)!}, \quad (2.38)$$

e desse modo, a probabilidade do caminhante estar a m passos da origem após N passos é dado por:

$$p(m, N) = \frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)! \left(\frac{N-m}{2}\right)!} p^{\frac{1}{2}(N+m)} q^{\frac{1}{2}(N-m)} = \binom{N}{\frac{N-m}{2}} p^{\frac{1}{2}(N+m)} q^{\frac{1}{2}(N-m)}. \quad (2.39)$$

A Eq. 2.39 é a conhecida distribuição binomial. Para calcularmos o primeiro e o segundo momento da distribuição, reescrevemos o número de passos para a direita $n_1 = (N+m)/2 = n$ obtendo

$$p(m, N) = p_N(n) = \frac{N!}{n! (N - n)!} p^n q^{N-n} = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}. \quad (2.40)$$

Considerando o teorema binomial que afirma

$$(p + q)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = 1^N = 1, \quad (2.41)$$

Vemos que a distribuição dada pela Eq. 2.40 esta devidamente normalizada. O valor médio de n é expresso por:

$$E[n] = \sum_{n=0}^N n p_N(n) = \sum_{n=0}^N n \left[\binom{N}{n} p^n q^{N-n} \right] \quad (2.42)$$

$$= \sum_{n=0}^N \left\{ \binom{N}{n} \left[p \frac{d}{dp} (p)^n \right] q^{N-n} \right\} = p \frac{d}{dp} \sum_{n=0}^N \left[\binom{N}{n} p^n q^{N-n} \right] \quad (2.43)$$

$$= p \frac{d}{dp} (p + q)^N = N p (p + q)^{N-1} = N p \quad (2.44)$$

Calcularemos o segundo momento do mesmo modo

$$E[n^2] = \sum_{n=0}^N n^2 p_N(n) = n \left(\frac{d}{dp} \right) (p^n) = \left(p \frac{d}{dp} \right)^2 (p^n) = N p + N(N - 1) p^2, \quad (2.45)$$

e por consequência a variância σ^2 é dada por:

$$\sigma^2 = E[(n - E(n))^2] = E[n^2] - (E[n])^2 = N p q. \quad (2.46)$$

E por fim, o valor médio da posição do caminhante, após N passos é dado por

$$E[m] = 2E[n] - N = N(p - q), \quad (2.47)$$

com o segundo momento expresso da forma

$$E[m^2] = 4E[n^2] - 4E[n]N + N^2 = 4\sigma^2 + (E[n])^2, \quad (2.48)$$

e a variância do deslocamento dada por

$$\sigma_m^2 = 4\sigma^2 = 4Npq. \quad (2.49)$$

Chamamos a atenção para o caso em que $p = q = 1/2$ que representa a caminhada aleatória isotrópica. Nesse caso, a escala da distância percorrida pelo caminhante é igual ao número total de passos N , isto é, $E[m] = 0$ e $E[m^2] = N$. Estas duas relações são as características do processo de difusão normal, o qual o movimento Browniano é um exemplo.

Abordaremos agora, o caso do limite contínuo da caminhada aleatória. Existem diferentes formas de se estudá-lo. Uma possibilidade é empregar a aproximação de Stirling [6] à Eq. 2.39 obtendo a distribuição Normal. Uma outra, é escrever a equação mestra da caminhada aleatória unidimensional para, então, obter a equação de difusão de Einstein cuja solução é, também, uma distribuição normal. Adotaremos uma abordagem mais “direta” utilizando as propriedades da função característica e o teorema central do limite, uma vez que a média e a variância, para a distribuição binomial, já foram calculadas.

Seja $f_X(x)$ a função densidade de probabilidade e $G(k)$ a função característica. Logo,

$$G(k) = E[e^{ikx_i}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_i) e^{ikx_i} dx_i, \quad (2.50)$$

onde agora, x_i é o deslocamento no instante $n\tau$. O deslocamento total será então $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Sabendo que $\mathcal{G}(k) = [G(k)]^n$ para valores de n grandes

$$G(k) = e^{i\mu k - \frac{\sigma k^2}{2}}, \quad (2.51)$$

em que μ é a média e σ é a variância. Disso segue que:

$$\mathcal{G}(k) = e^{in\mu k - \frac{n\sigma k^2}{2}}. \quad (2.52)$$

Agora, sabendo que $t = n\tau$ e definindo $\mu = c\tau$ e $\sigma = 2D\tau$ teremos:

$$\mathcal{G}(k) = e^{ictk - \frac{Dtk^2}{2}}. \quad (2.53)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier, que é definida por,

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(k) e^{-ikx} dk, \quad (2.54)$$

finalmente obtemos a densidade de probabilidade

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-ct)^2}{4Dt}} \quad (2.55)$$

que é uma função densidade Gaussiana com média ct e variância $2Dt$. A demonstração acima mostra que, para um número suficientemente grande de variáveis aleatórias x_n , a soma destas, dada por x , quando $n \rightarrow \infty$ converge para uma distribuição Gaussiana desde que as variáveis sejam independentes e identicamente distribuídas, com média e variância conhecidas.

2.5.2 Voos e caminhadas de Lévy

Na teoria das probabilidades existem importantes teoremas que estabelecem condições para o comportamento assintótico i.e., convergências em distribuição, em probabilidade e em sequências de variáveis aleatórias que são conhecidos, genericamente, como teoremas limites. Se as distribuições das variáveis aleatórias convergem para uma distribuição \mathbb{P} , esta é chamada de distribuição limite. Quando a distribuição limite existe, \mathbb{P} é considerado o atrator estatístico das variáveis aleatórias que convergem para \mathbb{P} . Exemplos de teoremas limites são a Lei dos grandes números e o Teorema central do limite. Conforme discutido anteriormente, o Teorema central do limite afirma que a convergência da soma de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas converge para a distribuição normal, desde que as variáveis aleatórias possuam primeiro e segundo momento, ou seja, que o primeiro e segundo momento, convirjam.

Obviamente, em um conjunto de variáveis aleatórias onde o primeiro e o segundo momento divergem, não é possível aplicar o Teorema central do limite para obter o atrator estatístico destas variáveis e, conseqüentemente, estas não podem ser descritas por uma distribuição Normal de probabilidades. Para este tipo de variáveis aleatórias, às quais possuem variância infinita, é necessário empregar modelos de distribuições estáveis, fazendo com que o teorema central do limite seja generalizado. A seguir apresentaremos o teorema central do limite generalizado suportado pelas definições de variáveis estáveis. As definições bem como o teorema foram extraídas de [35, 36].

Definição 2.5.1. Uma variável aleatória X segue uma distribuição estável se, para quaisquer números positivos A e B , existe um número positivo C e um número real D , tal que:

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D, \quad (2.56)$$

na qual X_1 e X_2 são cópias independentes de X e o símbolo “ $\stackrel{d}{=}$ ” denota igualdade de distribuições.

Na Eq. 2.56 se $D = 0$, X é dita ser estritamente estável para qualquer A e B . Estas variáveis são chamadas de estáveis porque suas densidades de probabilidades não mudam quando aplicada a Eq. 2.56. Distribuições de probabilidade que respeitam a Eq. 2.56 são chamadas de *distribuições α -estáveis de Lévy* porque, Paul Lévy foi o primeiro matemático a estudar distribuições estáveis. Estas distribuições incluem assimetrias e caudas pesadas⁵ em suas formas, e por isso, tem importante aplicação em problemas práticos como, por exemplo, aplicações financeiras, cosmologia, astrofísica e ecologia [38].

Teorema 2.5.1. Para qualquer variável aleatória X , há um número $\alpha \in (0, 2]$, tal que o número C expresso na Eq. 2.56, satisfaz a relação:

$$C^\alpha = A^\alpha + B^\alpha, \quad (2.57)$$

⁵ Heavy tails [37]

em que α é denominado índice de estabilidade e a variável X , é chamada de variável α -estável por ser indexada por α .

Podemos estender a definição 2.6.1 de modo a abranger a soma de variáveis aleatórias. Disso segue a definição:

Definição 2.5.2. Seja X uma variável aleatória que segue uma distribuição estável para qualquer $n \geq 2$. Se X_1, X_2, \dots, X_n são variáveis independentes com a mesma distribuição de probabilidade \mathbb{P} , então, \mathbb{P} é estável se, para cada n , existir uma constante $C_n > 0$ e um número real D_n , tais que:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n, \quad (2.58)$$

se $D_n = 0$, a distribuição de probabilidade \mathbb{P} é dita ser estritamente estável.

Isso implica em:

$$C_n^\alpha = n \implies C_n = n^{1/\alpha}, \quad (2.59)$$

para algum $0 < \alpha \leq 2$. Dadas as definições acima sobre a estabilidade de variáveis aleatórias e a sua soma, podemos agora apresentar o teorema central do limite generalizado (TCLG).

Teorema 2.5.2. (Teorema Central do Limite Generalizado): *Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Existe uma constante k_n tal que, à medida que $n \rightarrow \infty$, a soma*

$$k_n (X_1 + X_2 + \dots + X_n) \xrightarrow{d} \mathcal{L} \quad (2.60)$$

se, e somente se, \mathcal{L} for uma variável aleatória estável com algum parâmetro de estabilidade tal que, $0 < \alpha \leq 2$.

No teorema exposto acima, \mathcal{L} pode ser, também, considerada uma família de distribuições estáveis, caracterizadas pelo parâmetro de estabilidade α . Por esse fato, as distribuições \mathcal{L} são chamadas de *Distribuições α -estáveis de Lévy*. Uma informação importante a se ressaltar é que, para $\alpha = 2$, a distribuição \mathcal{L} segue uma distribuição Normal e o teorema recai no caso particular descrito pelo teorema central do limite. Esta é a razão pela qual o teorema exposto acima recebeu o nome de teorema central do limite generalizado.

Assim, o teorema central do limite generalizado faz com que, ao invés de distribuições terem seus comportamentos caracterizados por estimadores tais como, primeiro e segundo momento, as distribuições cuja variância divergem, são de um modo geral, agora, caracterizadas pelo conceito de estabilidade. Por isso, as distribuições α -estáveis de Lévy são consideradas o grande atrator estatístico das variáveis aleatórias que possuem variância infinita. Passaremos agora a caracterização da forma funcional das distribuições α -estáveis de Lévy simétrica, denotadas por $S_\alpha S$ [35]. Faremos esta caracterização, utilizando a função característica relacionada às distribuições α -estáveis de Lévy.

Definição 2.5.3. Uma variável aleatória X é simetricamente estável se, e somente se, $X \stackrel{d}{=} A\mathcal{L} + B$, na qual $0 < \alpha \leq 2$, $A \geq 0$, $B \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{L}(\alpha)$ é uma variável aleatória com função característica da forma

$$G(k) = e^{-\gamma^\alpha |k|^\alpha}. \quad (2.61)$$

A estabilidade é garantida, no sentido que a variável aleatória X é idêntica em distribuição a variável $A\mathcal{L} + B$, diferindo somente pelos parâmetros de localização e escala [36]. A Eq. 2.61 representa o comportamento assintótico da distribuição estável simétrica. O parâmetro α é, ainda, o índice de estabilidade da distribuição e está relacionada com a sua curtose. A dispersão relacionada a escala da distribuição é descrita pelo parâmetro γ .

Definição 2.5.4. Uma variável aleatória X é estável, seja ela simétrica ou não, com expoente característico α , dispersão γ e localização β , se X tem uma função característica do tipo:

$$\ln G(k) = \begin{cases} i\mu k - \gamma |k|^\alpha \left[1 - i\beta \frac{k}{|k|} \tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \right] & [\alpha \neq 1] \\ i\mu k - \gamma |k| \left[1 + i\beta \frac{k}{|k|} \frac{2}{\pi} \ln |k| \right] & [\alpha = 1], \end{cases} \quad (2.62)$$

A equação acima representa a forma geral de uma classe inteira de distribuições estáveis. Na Eq. 2.62, α é o parâmetro de estabilidade e está relacionado à curtose. Se $\alpha < 2$ a distribuição tem variância infinita, e para $\alpha > 1$ a média da distribuição existe, e vale $\alpha = \mu$. O parâmetro β descreve a assimetria da distribuição e, caso em que $\beta = 0$, a distribuição é simétrica. O comprimento da distribuição é controlado pelo parâmetro γ . Por fim, μ é o parâmetro de locação e em alguns casos particulares coincide com a média. A solução da Eq. 2.62 é obtida somente para três casos particulares a saber:

1. Lévy: $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$

$$f(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x - \mu)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x - \mu)}\right) \quad \mu < x < \infty \quad (2.63)$$

2. Cauchy: $\alpha = 1$ e $\beta = 0$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x - \mu)^2} \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.64)$$

3. Normal: $\alpha = 2$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0 \quad (2.65)$$

As distribuições α -estáveis de Levy são utilizadas em muitos problemas práticos na sua forma simétrica, $\beta = 0$, e com média nula ($\mu = 0$). Nesse caso a Eq. 2.62, fica caracterizada somente por seus parâmetros de estabilidade e de escala, e se reduz à forma,

$$G(k) = e^{-\gamma |k|^2}. \quad (2.66)$$

Uma vez que a função característica descreve a distribuição do processo estocástico [36], obtemos a densidade de probabilidade da distribuição de Lévy simétrica, por meio da transformada de cosseno de Fourier

$$P_L(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp[-\gamma|k|^\alpha] \cos(kx) dk. \quad (2.67)$$

Realizando uma integração por partes fazendo $\exp[-\gamma|k|^\alpha] = u$ e $dv = \cos(kx)dk$, obtemos:

$$P_L(x) = \frac{\gamma\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(kx)}{x} k^{\alpha-1} \exp[-\gamma|k|^\alpha] dk. \quad (2.68)$$

Por meio de uma mudança da variáveis $\phi = kx \implies d\phi = xdk$ obtêm-se:

$$P_L(x) = \frac{\gamma\alpha}{\pi x^{\alpha+1}} \int_0^\infty \phi^{\alpha-1} \sin(\phi) d\phi. \quad (2.69)$$

No limite em que $x \gg 1$ a integral na Eq. 2.71 recai na conhecida função gama:

$$P_L(x) \sim \frac{\gamma\alpha\Gamma(\alpha) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\pi x^{\alpha+1}}. \quad (2.70)$$

A Eq. 2.71 informa que o comportamento assintótico da distribuição simétrica de Lévy, $P_L(x)$, tem um comportamento do tipo lei de potência com expoente $-(\alpha + 1)$ e pode ser considerada na sua forma mais simplificada, como

$$P_L(x) \sim x^{-(\alpha+1)}. \quad (2.71)$$

O fato da distribuição α -estável ter um comportamento do tipo lei de potência, resulta em consideráveis consequências sobre os momentos da distribuição. Conforme evidenciamos quando apresentamos a Eq. 2.62, para processos estocásticos com parâmetro de estabilidade $\alpha < 2$, a distribuição tem variância infinita. Isso significa que todo processo não Gaussiano não possui uma escala característica [4, 39].

Do ponto de vista de aplicações à problemas práticos, o emprego da densidade de probabilidade de Lévy, cuja variância é infinita, constitui um problema. Isso porque dificilmente uma densidade de probabilidade com variância infinita descreve fenômenos reais. Os dados empíricos não se ajustam à cauda, que é infinitamente longa. A solução é introduzir uma classe de processo estocástico em que passos arbitrariamente grandes da distribuição sejam eliminados. Este processo estocástico se comporta como uma distribuição de Lévy para o caso em que número de passos é pequeno, e tende à distribuição Normal à medida que o número de passos se torna grande. O processo que tem esse comportamento recebe o nome de *Voo de Lévy Truncado*⁶ [7].

Este processo estocástico é caracterizado pela seguinte distribuição de probabilidade:

$$P(x) = \begin{cases} 0, & x > \ell \\ C\mathcal{L}(x), & -\ell \leq x \leq \ell \\ 0, & x < -\ell \end{cases} \quad (2.72)$$

⁶ *Truncated Lévy Flight*

A Eq. 2.72 caracteriza as distribuições de Levy truncada e tem sido amplamente empregada no ajuste de dados experimentais com a propriedade de voos de Lévy. Esta especificidade consiste no conjunto de dados possuir muitos valores pequenos intercalado com poucos valores grandes no espaço amostral. Essa particularidade, além de caracterizar uma consequência direta da divergência da variância, representa o comportamento das caminhadas de Lévy.

2.6 O Problema da Caminhada Aleatória

A dinâmica do movimento das estratégias de Lévy se resume, basicamente, a dois modelos: Caminhadas de Lévy⁷ Voos de Lévy⁸. A diferença principal entre esses dois modelos está relacionada a velocidade com que ocorre o movimento. Nos voos de Lévy a caminhada independe do comprimento do passo. O caminhante “salta” da posição inicial para a final instantaneamente. Já nas caminhadas de Lévy, a trajetória entre a posição inicial e final ocorre com uma velocidade suposta constante e linear no tempo. O uso de voos ou caminhadas de Lévy depende do problema a ser estudado.

Apresentaremos nessa seção a formulação analítica das estratégias de Lévy aplicada a buscas aleatórias. Estratégias de Lévy são caracterizadas pela função distribuição de probabilidade

$$P(\ell_i) = C\ell_i^{-\mu}, \quad (2.73)$$

em que $1 < \mu \leq 3$ descreve a estratégia de busca adotada pelo caminhante, C é uma constante de normalização e ℓ_i é o comprimento do voo. Além disso, $r_v < \ell_i < \ell_{máx}$ no qual r_v é o raio de visão do forrageador, e $\ell_{máx}$ é o tamanho máximo do passo que o forrageador pode executar. Na Eq. 2.73 o expoente μ generaliza a equação tornando-a uma família de distribuições. Nas estratégias de buscas, μ está associado a frequência relativa entre voos longos e curtos executados pelo forrageador. Quando $\mu \rightarrow 1,0$ a caminhada é realizada com passos predominantemente longos e, quanto mais próximo de $\mu = 1,0$ mais o padrão se aproxima do movimento balístico. A medida que o expoente μ aumenta, passos longos são menos frequentes e quando $\mu = 3,0$, o padrão se assemelha ao movimento browniano.

As regras que descrevem o movimento do caminhante, em um ambiente com uma distribuição aleatória de alvos [40], são descritas de seguinte maneira:

1. Se um alvo é encontrado dentro do raio de visão r_v , então o forrageador se move na direção do alvo em linha reta.
2. Na ausência de alvos dentro da distância dada por r_v , o caminhante escolhe a direção uniformemente no intervalo $[0, 2\pi)$ e executa um passo com comprimento dado por ℓ_i , de acordo com a Eq. 2.73.

⁷ Lévy Walks

⁸ Lévy Flights

Em ambientes de busca, dois tipos de alvos são considerados: não destrutivos, que mesmo encontrados permanecem no ambiente para serem novamente detectados, e alvos destrutivos que uma vez encontrados, são eliminados do ambiente. O livre caminho médio que o forrageador executa entre dois alvos sucessivamente detectados, isto é, a distância média entre dois alvos é dada por

$$\lambda = \frac{1}{2r_v\rho}, \quad (2.74)$$

em que ρ é a densidade de alvos por unidade de área. A distância média dos voos é dada por

$$\langle \ell \rangle \approx \frac{\int_{r_v}^{\lambda} \ell^{1-\mu} d\ell + \lambda \int_{\lambda}^{\infty} \ell^{-\mu} d\ell}{\int_{r_v}^{\infty} \ell^{-\mu} d\ell} = \left(\frac{\mu-1}{2-\mu} \right) \left(\frac{\lambda^{2-\mu} - r_v^{2-\mu}}{r_v^{1-\mu}} \right) + \frac{\lambda^{2-\mu}}{r_v^{1-\mu}}. \quad (2.75)$$

A Eq. 2.75 é originária de uma aproximação de campo médio. O denominador é um fator de normalização. O segundo termo dessa soma assegura que o forrageador encontre um novo alvo numa distância de no máximo igual a λ , partindo de um alvo previamente detectado. Essa aproximação evita divergências no comprimento dos passos. Define-se a função eficiência de busca $\eta(\mu)$ como sendo a razão entre o número de alvos visitados, pela distância total percorrida pelo forrageador, isto é,

$$\eta = \frac{1}{\langle \ell \rangle \mathcal{N}}, \quad (2.76)$$

em que \mathcal{N} descreve o número médio de passos dados pelo forrageador entre duas detecções. Esse número médio de passos pode ser estimado de duas formas, dependendo se o tipo de alvos presentes no ambiente é do tipo destrutível ou não destrutível. Para forrageamento de alvos destrutíveis, o número \mathcal{N} de passos médios entre duas detecções é dado por

$$\mathcal{N}_d \approx \left(\frac{\lambda}{r_v} \right)^{\mu-1}, \quad (2.77)$$

em que $1 < \mu \leq 3$. Para forrageamento não destrutivo, a Eq 2.77 superestima o número de passos entre dois alvos sucessivos. Isso ocorre em razão do ambiente não destrutivo permitir que os alvos possam ser revisitados. Podemos observar que para um movimento do tipo browniano ($\mu = 3,0$), a Eq. 2.77 escala com $\mathcal{N} \sim \lambda^2$. O número de passos para um caminhante browniano $\mathcal{N} \approx \lambda^2$ porque o tempo médio para um caminhante aleatório em uma dimensão que está inicialmente no meio de uma região de raio λ para alcançar a fronteira é $\mathcal{N}_d = \lambda^2/(2D)$, na qual D é a constante de difusão. Considerando r_0 ser uma pequena distância percorrida pelo forrageador entre o último alvo visitado e a posição após o primeiro voo para o caso não destrutivo teremos, $\mathcal{N}_n = (\lambda - r_0)r_0/(2D)$ porque o alvo pode ser revisitado. Dessa forma a escala do número de passos é quadrática no caso não destrutivo e linear para o caso não destrutivo. Disso segue que

$$\mathcal{N}_n \approx \left(\frac{\lambda}{r_v} \right)^{(\mu-1)/2}, \quad (2.78)$$

para $1 < \mu \leq 3$. A razão λ/r_v pode ser interpretada como uma espécie de parâmetro de mobilidade do forrageador, indicando o quanto é preciso caminhar, em média, antes de um alvo estar visível [41]. A aproximação na Eq. 2.78 se torna muito melhor a medida que a razão λ/r_v aumenta.

2.7 Estatística Não Paramétrica e o Teste Estatístico de Kolmogorov-Smirnov

Nessa seção abordaremos conceitos importantes da estatística. A ideia é esclarecer conceitos fundamentais da estatística, a fim de poder entender o teste estatístico utilizado nesse capítulo: o teste de Kolmogorov-Smirnov.

2.7.1 Estatística paramétrica e não paramétrica

O tema central da Estatística é a chamada Inferência Estatística que aborda, fundamentalmente, dois tipos de problemas: a estimação de parâmetros de uma população e o teste de hipóteses que, basicamente, informa se os resultados experimentais provenientes de uma amostra contrariam, ou não, uma dada afirmação. Na Inferência Estatística procura-se tirar conclusões sobre um grande número de eventos com base na observação de apenas parte deles.

Por exemplo, consideremos uma grandeza física desconhecida ϕ que pode ser, por exemplo, uma velocidade atribuída a uma partícula. Realizamos n medições (x_1, x_2, \dots, x_n) desta grandeza e a partir delas queremos estimar ϕ . Em um modelo estatístico, o conjunto das medições realizadas dadas por x_n constituem os valores aleatórios das medidas, associadas as variáveis aleatórias (X_1, X_2, \dots, X_n) , isto é, x_1 é o valor da variável aleatória X_1 , x_2 é o valor da variável X_2 , e assim por diante. As variáveis X_1, \dots, X_n são independentes e distribuídas de acordo com uma distribuição de probabilidade F , desconhecida. Podemos então nos perguntar: qual a relação entre os dados (x_1, \dots, x_n) e a grandeza ϕ ?

Como parte do modelo estatístico consideramos F como dependente de ϕ . Para explicitar essa dependência escrevemos $F = F_\phi$. Assim, a grandeza ϕ serve de parâmetro da família de distribuições $\{F_\phi\}_{\phi \in \Phi}$ de distribuições dos X 's. Considerando $x_i = \phi + \epsilon_i, \dots, x_n = \phi + \epsilon_n$, em que ϵ 's são os erros na medição, considerados aleatórios. No modelo, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ são valores das variáveis aleatórias E_1, \dots, E_n respectivamente, e são consideradas independentes e com distribuição comum F_0 .

Supondo que os erros são pequenos em valor absoluto, e que além disso, erros muito grandes sejam muito raros, podemos considerar a distribuição F_0 como sendo uma distribuição normal com média ϕ e variância σ^2 , supostamente conhecida. Desse modo, a distribuição das variáveis aleatórias observadas, X_1, \dots, X_n , pertencem à família das distribuições normais $\{N(\phi, \sigma^2)\}_{\phi \in \Phi}$. Desejamos estimar $\phi = \phi_0$, isto é, justamente o valor que especifica a distribuição das variáveis aleatórias observadas, X_1, \dots, X_n . Queremos inferir de que modo os dados (x_1, \dots, x_n) estão relacionados com ϕ . É de se esperar que os valores de x_1, \dots, x_n tendam

a se agrupar em torno de ϕ , e grandes valores de ϕ são propensos a “gerar” valores grandes de x_1, \dots, x_n .

Se considerarmos uma família de distribuições $\mathcal{F}(N(\phi, \sigma^2))_{\phi \in \Phi}$ em que cada elemento da família é caracterizado por um valor de ϕ podemos, dessa maneira, dizer que ϕ é um parâmetro da distribuição ou que a família de distribuições é parametrizada por ϕ . Nesse caso o modelo estatístico é denominado como paramétrico. Modelos estatísticos paramétricos devem ter suas observações extraídas de populações com distribuição normal [42]. Há modelos estatísticos que não requerem que a distribuição da população seja caracterizada por certos parâmetros. Modelos dessa natureza são conhecidos como não paramétricos.

Dentre muitos modelos não paramétricos utilizados para analisar uma amostra, encontramos o teste de Kolmogorov-Smirnov para uma ou duas amostras. O teste para uma amostra é usado para determinar se os valores da população da qual se extraiu uma das amostras são, ou não, estocasticamente maiores do que os valores da população que originou a outra amostra. Para duas amostras, o teste de Kolmogorov-Smirnov tem como objetivo, comparar se duas amostras foram extraídas da mesma população, ou de populações com a mesma distribuição. O teste de Kolmogorov-Smirnov (também conhecido como teste K-S) é sensível a qualquer diferença nas distribuições das quais se extraíram as amostras.

Basicamente o teste K-S diz respeito à concordância (ou diferenças) entre as distribuições acumuladas. Enquanto que o teste K-S para uma amostra se refere a concordância entre a distribuição de valores amostrais e uma distribuição de referência, o teste de Kolmogorov-Smirnov para duas amostras visa a concordância entre dois conjuntos de valores amostrais. Se duas amostras foram realmente retiradas da mesma população, então as distribuições acumuladas devem ser suficientemente próximas uma da outra.

2.7.2 O teste de Kolmogorov-Smirnov

Nos limitaremos nessa subseção em apresentar o método de Kolmogorov-Smirnov para duas amostras. Nossa inferência terá como ponto de partida o teste de hipótese. Definimos, dessa maneira, duas hipóteses, H_0 que é a hipótese assumida como verdadeira para a construção do teste e a hipótese alternativa H_1 , que é a hipótese considerada, quando a hipótese nula não se verifica. Nesse capítulo, empregamos o teste de Kolmogorov-Smirnov com relação a duas distribuições de Lévy: a distribuição de Lévy de referência $P_{ref}(\ell)$, cuja estratégia de busca é $\mu = 1,5$ e a distribuição de probabilidade combinada de Lévy $P_c(\ell)$, que é uma combinação de estratégias de Lévy dada por $\mu = 1,1$ e $\mu = 2,0$. Assim nossas hipóteses nula H_0 e alternativa H_1 serão, respectivamente:

1. H_0 : As duas distribuições de probabilidade são iguais, isto é, $P_{ref}(\ell) = P_c(\ell)$.
2. H_1 : As duas distribuições são diferentes, ou seja, $P_{ref}(\ell) \neq P_c(\ell)$.

Associado às hipóteses temos o nível de significância do teste estatístico, indicado

por α . Se o teste K-S fornecer um valor cuja a probabilidade associada a ocorrência de H_0 é igual a, ou menor do que a probabilidade α , rejeitamos H_0 em favor de H_1 . Os valores mais comuns para o nível de significância são $\alpha = 0,05$ e $0,01$. Após definirmos a hipótese nula e alternativa, aplicamos o teste de Kolmogorov-Smirnov para verificar a validade de H_0 . Para realizar este teste construímos, primeiramente, uma distribuição acumulada da frequência dos dados observados, utilizando os mesmos intervalos para ambas as distribuições. O teste aponta o maior desvio observado entre essas duas distribuições.

Seja $F_{n_1}(x) = K/n_1$ e $F_{n_2}(x) = K/n_2$ as distribuições acumuladas observadas das duas amostras, em que K é o número de escores não superiores a x e n_1 e n_2 é o número total de dados das amostras. O teste de Kolmogorov-Smirnov para duas amostras, estabelece que

$$D = \sup_x |F_{n_1}(x) - F_{n_2}(x)|. \quad (2.79)$$

em que D é a maior distância entre as duas distribuições de probabilidade acumulada. Mais adiante mostraremos os resultados da utilização do teste de Kolmogorov-Smirnov. Mas antes, abordaremos o método para obter os valores amostrais para a realização do teste: o método da inversão.

2.8 O Método Da Inversão

Em problemas estatísticos, geralmente, temos um conjunto de dados que descreve um determinado evento observado. Associamos a cada valor desse conjunto de dados uma probabilidade, e desejamos obter a função distribuição de probabilidade que descreve o fenômeno para, assim, poder extrair parâmetros importantes do sistema, tais como, a média e o desvio padrão.

Outras vezes sabemos qual a função distribuição de probabilidade que melhor descreve o fenômeno em questão, e queremos obter o conjunto de dados que descreve o evento observado. Para este fim, utilizamos o método da inversão. Esse método, em teoria de forrageamento, representa uma ferramenta matemática para gerar o comprimento dos passos dados pelo forrageador durante a dinâmica de busca, utilizando os conceitos fundamentais da teoria de probabilidades, como por exemplo, a geração de números aleatórios. O método da inversão utiliza, basicamente, as transformações inversas das distribuições de probabilidade.

Consideremos uma função distribuição de probabilidade uniforme $p(x)$ de modo que:

$$p(x)dx = \begin{cases} dx, & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases} \quad (2.80)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1. \quad (2.81)$$

Estamos interessados em transformar $p(x)$ numa distribuição de probabilidade não-uniforme $p(y)$. Tal transformação é garantida [?] se

$$|p(y)dy| = |p(x)dx| \longrightarrow p(y) = p(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|. \quad (2.82)$$

Para que a distribuição $p(y)$ seja expressa por uma função escrevemos

$$f(y) = p(y) = p(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|. \quad (2.83)$$

A Eq. 2.83 relaciona a variável aleatória x , que possui uma distribuição de probabilidade $p(x)$, com uma variável y da função de distribuição $p(y)$. Considerando que x é uma variável aleatória distribuída uniformemente no intervalo $[0, 1]$, e $p(x)$ uma constante temos

$$f(y) = \frac{dx}{dy} \quad (2.84)$$

cuja solução é

$$x = F(y) = \int_{-\infty}^y f(z)dz. \quad (2.85)$$

A Eq. 2.85 relaciona as variáveis aleatórias x e y . Desse modo, calculando a função inversa $F^{-1}(x)$ podemos obter a variável aleatória y como função de x , isto é,

$$y(x) = F^{-1}(x), \quad (2.86)$$

que existirá desde que seja possível resolver a Eq. 2.85 e a Eq. 2.86. Podemos, desse modo, resumir o método de inversão para gerar variáveis aleatórias a partir de uma distribuição de probabilidade $p(x)$ qualquer, em três passos:

1. Calculamos, primeiramente, a função distribuição de probabilidade normalizada de $p(x)$.
2. Calcula-se, em seguida, a função distribuição acumulada para uma dada variável x :

$$s(x) = \int_{x_{min}}^x p(y)dy = 1 \quad (2.87)$$

onde $x_{min} \leq y < x$ e $0 \leq s(x) \leq 1$.

3. Obtêm-se, por fim, a inversa de $s(x)$, $x = F^{-1}(s)$.

A título de exemplo, aplicaremos o método da inversão para calcular o comprimento dos passos gerados pela distribuição de probabilidade de Lévy, $p(\ell) = \ell^{-\mu}$. Calculando

a função distribuição normalizada no intervalo $[r_v, \ell_{máx}]$, em que r_v é o raio de visão do forrageador e $\ell_{máx}$ é o tamanho máximo do passo dado pelo caminhante temos

$$\int_{r_v}^{\ell_{máx}} \alpha \ell^{-\mu} d\ell = 1, \quad (2.88)$$

em que α é a constante de normalização. Resolvendo a Eq. 2.88 temos:

$$\alpha \frac{r_v^{1-\mu} - \ell_{máx}^{1-\mu}}{\mu - 1} = 1$$

$$\alpha = \frac{\mu - 1}{r_v^{1-\mu} - \ell_{máx}^{1-\mu}}. \quad (2.89)$$

Agora, calculando a distribuição de probabilidade acumulada $F(\ell)$ obtemos

$$s(\ell) = F(\ell) = \frac{\mu - 1}{r_v^{1-\mu} - \ell_{máx}^{1-\mu}} \int_{r_v}^{\ell} \ell^{-\mu} d\ell$$

$$F(\ell) = \frac{1}{r_v^{1-\mu} - \ell_{máx}^{1-\mu}} \left(r_v^{1-\mu} - \ell^{1-\mu} \right), \quad (2.90)$$

Podemos observar que, para $\ell = \ell_{máx}$ temos $F(\ell) = 1$, e se $\ell = r_v$, $F(\ell) = 0$. Se invertermos a Eq. 2.90 obteremos a expressão para gerar passos aleatórios, cujo comportamento difusivo dependerá da estratégia de busca μ adotada. Invertendo a Eq. 2.90 obtemos

$$\ell = \left[r_v^{1-\mu} - \left(1 - \ell_{máx}^{1-\mu} \right) F(\ell) \right]^{\frac{1}{1-\mu}}. \quad (2.91)$$

Estamos interessados em aplicar o método da inversão em uma distribuição de Lévy que é representada por uma combinação de duas distribuições de Lévy somadas, isto é,

$$P_c(\ell) = \left(\frac{\mu_1 - 1}{r_v^{1-\mu_1} - \ell_{máx}^{1-\mu_1}} \right) \omega \ell^{-\mu_1} + \left(\frac{\mu_2 - 1}{r_v^{1-\mu_2} - \ell_{máx}^{1-\mu_2}} \right) (1 - \omega) \ell^{-\mu_2}, \quad (2.92)$$

onde $\omega \in [0,1; 0,9]$ é o peso estatístico que faz com que a soma das distribuições de Lévy esteja devidamente normalizada. As constantes multiplicativas nos dois termos da soma, na Eq. 2.92, são as respectivas constantes de normalização das distribuições.

Calculando a distribuição de probabilidades $F_c(\ell)$, associada a Eq. 2.92 temos

$$F_c(\ell) = \left(\frac{\mu_1 - 1}{r_v^{1-\mu_1} - \ell_{máx}^{1-\mu_1}} \right) \omega \int_{r_v}^{\ell} \ell^{-\mu_1} d\ell + \left(\frac{\mu_2 - 1}{r_v^{1-\mu_2} - \ell_{máx}^{1-\mu_2}} \right) (1 - \omega) \int_{r_v}^{\ell} \ell^{-\mu_2} d\ell$$

$$F_c(\ell) = \left(\frac{\omega}{r_v^{1-\mu_1} - \ell_{máx}^{1-\mu_1}} \right) \left(r_v^{1-\mu_1} - \ell^{1-\mu_1} \right) + \left(\frac{1 - \omega}{r_v^{1-\mu_2} - \ell_{máx}^{1-\mu_2}} \right) \left(r_v^{1-\mu_2} - \ell^{1-\mu_2} \right). \quad (2.93)$$

Substituindo na Eq. 2.93, os parâmetros $r_v = 1$, $\mu_1 = 1,1$ e $\mu_2 = 2,0$ obtemos, após alguma manipulação matemática, a expressão para gerar os passos aleatórios para um caminhante que executa uma estratégia de Lévy combinada

$$\ell = \left[\frac{\beta_1 \ell^{(\mu_2 - \mu_1)} + \beta_2}{\beta_1 + \beta_2 - F_c(\ell)} \right]^{\frac{1}{\mu_2 - 1}} \quad (2.94)$$

com

$$\beta_1 = \frac{\omega}{1 - \ell_{máx}^{1-\mu_1}} \quad \text{e} \quad \beta_2 = \frac{1 - \omega}{1 - \ell_{máx}^{1-\mu_2}}.$$

Podemos observar que a Eq. 2.94 não é analiticamente inversível. Na próxima seção apresentamos uma forma para obter as soluções da Eq. 2.94. Uma vez obtidos os passos aleatórios gerados pela distribuição de Lévy $P(\ell) = \beta \ell^{-1,5}$, e pela distribuição de Lévy combinada $P_c(\ell) = \beta_1 \omega \ell^{-1,1} + \beta_2 (1 - \omega) \ell^{-2,0}$, aplicaremos o teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov para verificar quais valores de ω satisfazem o teste estatístico e consequentemente pertencem a mesma distribuição de probabilidade.

2.9 Transientes

Em vários processos físicos transientes são usualmente não analisados. O interesse é focado no comportamento assintótico ou estacionário do sistema. Entretanto, existem situações concretas na natureza onde a evolução inicial (i.e. para tempos pequenos) é fundamental na determinação das características estacionárias finais. Isto é particularmente verdade em processos de reação-difusão, onde pequenas flutuações na dinâmica inicial podem levar à padrões espaço-temporais totalmente distintos ao atingir-se o estado estacionário (ver [43], bem como as referências ali citadas). Tal fenomenologia será estudada no capítulo 3. Mas para darmos exemplos mais didático de transientes, a seguir apresentaremos duas situações simples porém bastante ilustrativas. Caracterizaremos a presença do transiente em dois sistemas conhecidos na literatura, e que possuem naturezas diferentes: um determinístico, decorrente da solução da equação diferencial que descreve a energia do oscilador harmônico amortecido e o outro estocástico, resultante da solução da equação de Langevin, que descreve o movimento Browniano de uma partícula.

Na literatura encontramos diferentes definições para transiente, que entretanto são fortemente relacionadas. No contexto determinístico umas das possibilidades é entender um transiente como a solução de uma equação diferencial quando há estímulos distintos, mas no logo prazo uma das forças atuantes irá prevalecer [44].

Vamos considerar então a equação do oscilador harmônico amortecido dada pela expressão (este exemplo é dado no livro do Feynman, *Lectures on Physics* [44])

$$m \frac{d^2}{dt^2} x + \gamma m \frac{d}{dt} x + m \omega_0^2 x = F(t), \quad (2.95)$$

em que o segundo termo do lado direito da Eq. 2.95 é o termo resistivo com γm representando o coeficiente de arraste, e $m\omega_0^2$ é a constante da mola com ω_0 caracterizando a frequência natural do sistema. A força, do lado esquerdo da Eq. 2.95, é descrita por uma função do tipo cosseno de t .

Suponhamos que o sistema comece a oscilar por meio da atuação de uma força e após um certo tempo, a sua ação, cesse. A energia do sistema, na ausência de força externa, é descrita pela equação

$$\frac{d}{dt}E = -\omega \frac{E}{Q}. \quad (2.96)$$

Na equação acima, Q representa uma figura de mérito para a eficiência do oscilador. Esta figura de mérito compara a quantidade de energia armazenada no oscilador com a quantidade de trabalho que a força realiza por ciclo. Dessa forma, Q é definido como a razão entre a energia média e o trabalho médio por ciclo (potência média)

$$Q = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{\langle P \rangle 2\pi/\omega}, \quad (2.97)$$

sabendo que a energia média do oscilador pode ser escrita como

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} (\omega^2 + \omega_0^2) \frac{1}{2} m x_0^2, \quad (2.98)$$

e a potência média é dada por

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} m \gamma \omega^2 x_0^2, \quad (2.99)$$

a expressão para Q segue

$$Q = \frac{1}{2} \frac{(\omega^2 + \omega_0^2)}{\gamma \omega}. \quad (2.100)$$

Para que seja um número útil, Q deve ser expressivamente grande. Para um bom oscilador, próximo da ressonância ($\omega \approx \omega_0$), temos $Q = \omega_0/\gamma$. Considerando um valor de Q alto, enquanto uma força estiver atuando no sistema, a energia permanecerá a mesma e uma certa quantidade de trabalho deverá ser realizado para mantê-la. Supondo que a força deixe de atuar no sistema e nenhum trabalho seja realizado, a energia do sistema será consumida. De acordo com a Eq. 2.96, a cada radiano, o sistema perde uma fração $1/Q$ da sua energia armazenada E . Desse modo, a cada infinitésimo de tempo dt , a energia muda de acordo com a relação, $\omega dt/Q$.

Supondo que o sistema se move tão bem, com quase nenhuma força, de modo que se o deixarmos, este oscilará essencialmente na mesma frequência. Nesse sentido, é razoável considerar que a frequência, ω , é a frequência de ressonância. Com essas considerações, a solução da Eq. 2.96, é

$$E = E_0 e^{-\omega_0 t/Q} = E_0 e^{-\gamma t}. \quad (2.101)$$

É possível notar que no instante inicial $t = 0$, $E = E_0$, e após um tempo suficientemente longo, isto é, após o transiente ($t \rightarrow \infty$), o termo exponencial se anula e a energia do sistema vai à zero.

O segundo exemplo de sistema físico a apresentar transiente em é aquele em que uma partícula se move em um meio viscoso no qual, este, oferece resistência ao movimento da partícula. Conforme mencionado anteriormente, esse movimento é conhecido como movimento Browniano. O tamanho da partícula é considerado grande em relação ao comprimento da distância média entre as moléculas que compõem o meio. A equação diferencial que descreve o movimento Browniano é a equação de Langevin e é expressa por

$$m \frac{d}{dt} v = -\alpha v + F_a(t). \quad (2.102)$$

O primeiro termo do lado direito da Eq. 2.102, descreve a resistência que o meio impõe à partícula e $F_a(t)$ é uma força randômica, que atua sobre a partícula, e que possui a seguinte propriedade: $\langle F_a(t) \rangle = 0$. Desse modo a equação de Langevin representa uma equação diferencial estocástica não homogênea de primeira ordem.

Apresentamos a seguir a solução proposta por Langevin, em 1908, para o cálculo do desvio quadrático médio $\langle \Delta x^2 \rangle$, do deslocamento da partícula [45]. Introduzindo a variável $z = (d/dt)x^2$ e tomando a sua derivada, escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} z &= \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d}{dt} \right) x^2 \right] \\ \frac{d}{dt} z &= 2v^2 + 2x \frac{d}{dt} v. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Substituindo a Eq. 2.102, na Eq. 2.103 e tomando a média, obtemos

$$m \frac{d}{dt} \langle z \rangle = 2m \langle v^2 \rangle - \alpha \langle z \rangle + 2 \langle x F_a(t) \rangle. \quad (2.104)$$

Considerando o teorema da equipartição de energia podemos escrever $\langle v^2 \rangle = k_B T / m$, em que a constante k_B , é a conhecida constante de Boltzmann. Levando em conta que $\langle F_a(t) \rangle$ e $\langle x \rangle$ são grandezas estatisticamente independentes podemos escrever, $\langle x F_a(t) \rangle = \langle F_a(t) \rangle \langle x \rangle = 0$. Desse modo, a Eq. 2.104 pode ser reescrita na forma

$$m \frac{d}{dt} \langle z \rangle = 2k_B T - \alpha \langle z \rangle. \quad (2.105)$$

Tomando $\langle z \rangle = \langle x^2 \rangle$ reescrevemos a 2.105 como

$$m \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 2k_B T - \alpha \langle x^2 \rangle. \quad (2.106)$$

Consideramos a solução da Eq. 2.106, como a soma das soluções homogênea e particular. Assim, a solução homogênea tem a forma $\langle x^2 \rangle = C e^{-\alpha t / m}$, em que $C = \langle x_0^2 \rangle$. Já a solução particular é $\langle x^2 \rangle = \langle x_0^2 \rangle + (2k_B T / \alpha) t$. Finalmente, a solução da Eq. 2.103, considerando $K_B T / \alpha = D$, é

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x_0^2 \rangle = 2Dt + \langle x_0^2 \rangle e^{-\frac{\alpha t}{m}}. \quad (2.107)$$

Na Eq. 2.107, a constante D é o coeficiente de difusão e representa a facilidade com que a partícula se difunde em um determinado meio. Desse modo, a Eq. 2.107 informa que o desvio quadrático médio do deslocamento da partícula é composto por uma soma de dois termos: um linear e outro exponencial. Note que, quando $t = 0$, $\langle x^2 \rangle = 0$ ou $\langle \Delta x^2 \rangle = \langle x_0^2 \rangle$, e quando $t \rightarrow \infty$ (após o transiente), o termo exponencial se anula e obtemos a relação $\langle \Delta x^2 \rangle = 2Dt$, isto é, após o transiente, o desvio quadrático médio varia linearmente com o tempo.

CARACTERIZAÇÃO DA DINÂMICA DURANTE O TRANSIENTE PARA PROCESSOS DE LÉVY

Neste capítulo, apresentaremos um modelo para a caracterização da dinâmica durante o tempo transiente em processos de busca aleatória, regidos por uma estratégia de Lévy. Para isso, propomos um mecanismo de criação e aniquilação de alvos, fazendo com que a densidade de alvos no ambiente varie com o tempo. Na medida em que o caminhante aleatório percorre uma certa distância típica, um alvo é colocado no ambiente de busca, caracterizando a dinâmica da densidade de alvos presentes no ambiente. Estudamos, analítica e numericamente, a influência da estratégia de busca e da distância típica percorrida pelo caminhante durante o tempo transiente, ou seja, até o ambiente evoluir para o regime estacionário, e comparamos os resultados com os obtidos por meio de simulação computacional.

3.1 Introdução

A abordagem convencional no estudo de processos naturais tem como foco o seu comportamento estacionário (ou após atingir um estado estacionário¹), com muito menos atenção sendo dada à evolução inicial, ou seja, ao transiente. Mas os transientes podem influenciar fortemente o relaxamento de um sistema [46–50], determinando assim muitas de suas propriedades finais [47, 51, 52]. Conforme discutido em [47], aspectos como: (a) a duração transitória [50]; (b) a natureza de sua dinâmica [48, 53]; (c) a interconexão entre o transiente e as características do estado estacionário [52]; e (d) os valores finais das variáveis

¹ Encontram-se definições próximas, embora distintas, de "estado estacionário" na literatura. Aqui, significa que o sistema pode apresentar uma dinâmica no tempo, mas com quantidades relevantes permanecendo constantes se a média for calculada em intervalos de tempo curtos.

de estado dependem do transiente [49, 52]; podem ser essencial para compreender o equilíbrio estatístico.

Essas questões são especialmente relevantes em ecologia, uma vez que as escalas de tempo envolvidas frequentemente ainda estão distantes de seus limites assintóticos [54]. Como consequência, mudanças comportamentais abruptas ou fortes podem ter causa não devido às interações ambientais ou das espécies, mas sim devido a transientes, ou seja, dinâmicas ainda não estabilizadas [55]. Na verdade, compreender os efeitos de longo prazo do transiente não é apenas uma questão científica básica. Tem muitas aplicações práticas, tais como: para controlar sistemas de engenharia [56] (tão diversos quanto aqueles baseados em convecção térmica [57] ou reatores nucleares [58]), previsão do tempo [52, 59], compreensão da ativação e formação de padrões em células biológicas [60, 61]; isso para citar apenas alguns.

Os processos de reação-difusão são uma classe importante de fenômenos estocásticos nos quais a evolução em tempos curtos pode ser particularmente determinante para seu comportamento de longo prazo [53, 54, 60, 62]. Esta ligação pode até ser aumentada se o componente difusivo for anômalo, por exemplo, descrito por voos ou caminhadas Lévy superdifusivas [4, 48, 51, 63–67]. Para sistemas superdifusivos de reação-difusão (SSRD), respostas universais para (a)-(d) podem não ser possíveis. No entanto, alguns trabalhos foram capazes de apontar tendências globais nos transientes de certos grupos de SSRD [65, 67–69] [21, 24–26].

Por outro lado as características do ambiente de busca desempenham um papel essencial em modelos de busca aleatória. Em geral, o ambiente de busca é caracterizado por um número constante e finito de alvos, distribuídos de forma aleatória, onde o forrageador realiza a busca dos alvos sem o conhecimento prévio de suas localizações [40]. A cada nova simulação a distribuição espacial dos alvos muda, mas o número total de alvos no ambiente permanece constante. Dependendo das características do ambiente de busca, a estratégia de busca que otimiza a eficiência do forrageador pode variar [70].

Estudos realizados em um ambiente com distribuição esparsa de alvos e que, uma vez encontrados pelo forrageador, só podem ser detectados após um intervalo de tempo, mostram que a estratégia de busca que otimiza a eficiência, quando $t \rightarrow \infty$, é a estratégia balística [71]. Em um ambiente com baixa densidade de alvos, distribuídos de forma heterogênea em que o forrageamento é não destrutivo [72], a eficiência de busca se mostra ótima ($\mu_{opt} \approx 2,0$), universal e independente das propriedades gerais de escala na distribuição espacial dos alvos.

No contexto biológico, as interações entre predadores e presas podem ser descritas por meio de taxas de encontro biológico. Estas taxas, que também descrevem o processo de reação-difusão em buscas aleatórias, influenciam diretamente a eficiência de busca [73]. Ambientes de busca fragmentados afetam as taxas de encontros biológicos, diminuindo a eficiência de busca do forrageador [74]. Desse modo, a fragmentação do ambiente de busca

fornece evidências para a explicação do declínio da biodiversidade.

Os recursos naturais, que são a base da biodiversidade e do equilíbrio dos ecossistemas, não são estáticos. Eles variam com o tempo e, em largas escalas de tempo, a influência sazonal dos recursos influencia a distribuição e a quantidade de alimentos no ambiente [21]. Por outro lado, espécies competem e compartilham os recursos do ambiente de busca. As comunidades ecológicas consistem em indivíduos de diferentes espécies ocupando um território finito e dividindo seus recursos [75]. Trabalhos utilizando ensembles estatísticos mostram que a biodiversidade e os recursos são otimizados quando o ecossistema se encontra próximo a uma transição de fase [76]. A caracterização da dinâmica do ambiente de busca durante o transiente e de seus estados estacionários pode fornecer subsídios para compreender a formação da biodiversidade e, conseqüentemente, a formação dos ecossistemas, onde há equilíbrio entre predadores e presas.

A seguir, apresentaremos um modelo de busca aleatória no qual o ambiente de busca possui uma densidade de alvos que varia com o tempo. A busca por alvos é realizada por um caminhante aleatório (forrageador) e o número de alvos aumenta de forma periódica. O forrageador percorre o ambiente com uma velocidade constante e a cada distância τ percorrida pelo forrageador, um novo alvo é adicionado no ambiente em uma posição aleatória. O forrageamento é do tipo destrutivo: o alvo, uma vez detectado, é removido do ambiente. Por meio de funções que descrevem o número de alvos encontrados pelo forrageador e o número de alvos no ambiente, queremos caracterizar a dinâmica do ambiente de busca durante o transiente e a compatibilidade com os estados estacionário obtidos via simulação computacional.

3.2 O Modelo Analítico

Consideremos um ambiente finito representado por uma área A , com condições de contorno periódicas aplicadas. Alvos são adicionados (criados) e removidos (aniquilados) do ambiente de busca \mathcal{S} de acordo com a representação da figura 3.1. A cada instante de tempo em que o buscador percorre um comprimento característico λ , um alvo é adicionado no ambiente em uma posição aleatória. A velocidade do buscador é considerada constante e unitária, de modo que comprimento característico é proporcional ao tempo característico τ , para que um alvo seja adicionado no ambiente, isto é, $\lambda = \tau$. A busca é considerada destrutiva, e uma vez que o buscador encontra o alvo, este é removido do ambiente.

As quantidades chave aqui são o número efetivo de alvos distribuídos aleatoriamente no ambiente, no tempo t , representado por $N(t)$, e a distância média típica entre dois alvos. Com relação ao ambiente de busca, a dinâmica do nosso modelo é composta por dois mecanismos básicos: o mecanismo de criação de alvos e o de aniquilação de alvos, sendo que o mecanismo de remoção de alvos é realizado por um buscador aleatório que os procura por meio de estratégias de Lévy. Na figura 3.1 mostramos um esquema que descreve a dinâmica

do ambiente de busca.

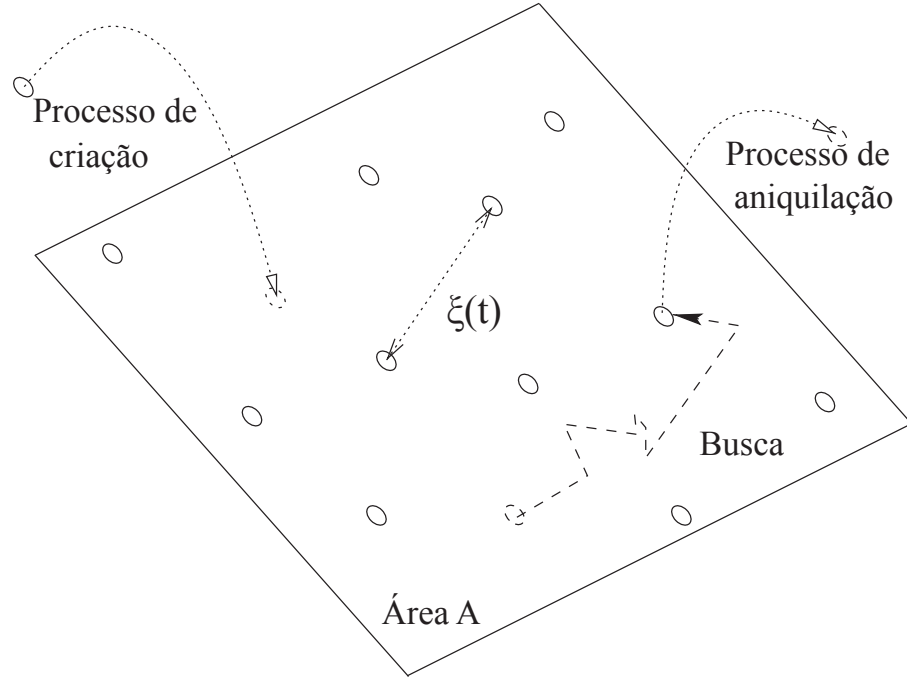


Figura 3.1 – Figura representativa do espaço de estados \mathcal{S} (da área A), no qual estados são aleatoriamente criados a uma certa taxa $1/\tau$. As aniquilações desses estados ocorrem devido a processos estocásticos de reação-difusão. Uma quantidade relevante é o número de estados efetivos em \mathcal{S} no instante de tempo t , a quantidade $N(t)$. O transiente dinâmico pode ser caracterizado por meio da variação temporal de $N(t)$ até alcançar o limite estacionário em $t = T_{est}$, tal que $N(t > T_{est}) = cte$. No espaço \mathcal{S} é possível definir uma métrica para o sistema considerando que a distância média entre os estados é dada por $\xi(t) = \sqrt{A/N(t)}$.

Podemos definir uma métrica para o sistema, considerando que a distância média entre os alvos, $\xi(t)$, no espaço de estados \mathcal{S} , é uma distância típica entre eles, e que varia de acordo com a equação

$$\xi(t) = \sqrt{\frac{A}{N(t)}}. \quad (3.1)$$

O processo de criação de alvos ocorre assumindo que, no instante de tempo $t = \tau_0 = 0$, o sistema inicia com N_0 alvos uniformemente distribuídos, e então, a cada instante de tempo $t = \tau_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) são adicionados N_n alvos no ambiente. Para o processo de aniquilação de alvos, é considerado que os alvos são removidos de \mathcal{S} após o seu encontro, por meio de uma busca aleatória.

O procedimento para o encontro de alvos é aquele que considera um caminhante aleatório que procura por alvos de acordo com as regras de busca aleatória já anteriormente descritas. O caminhante (a) escolhe uma direção aleatória $0 \leq \theta < 2\pi$ bem como um comprimento para o seu passo $r_v < \ell \leq \sqrt{A}$, descrito pela distribuição de probabilidades de Lévy truncada. Então, (b) ele inicia seu movimento com velocidade constante v .

Ao longo do caminho percorrido (de comprimento ℓ), o caminhante está apto a detectar qualquer alvo dentro do seu raio de visão r_v . Se um alvo é detectado, o caminhante se dirige ao alvo em linha reta até a sua posição, e então, o alvo é removido do ambiente. Isso é considerado o truncamento do voo ou da caminhada de Lévy. Caso contrário, o caminhante termina de percorrer a distância total, ℓ , por ele escolhida. Em ambos os casos, o protocolo completo da estratégia se resume ao sorteio de um novo passo (partindo do último local de parada).

Analisando a dinâmica de \mathcal{S} sobre o ambiente de busca, se inicialmente a criação de alvos é maior que a taxa de aniquilação, o número de alvos deve começar a aumentar, consequentemente aumentando as chances de o caminhante os encontrar. Portanto, essas taxas deverão se igualar em um instante de tempo, $t = T_{est}$, para o qual a partir desse instante, $N(t > T_{est}) = cte$.

Denominaremos a situação acima exposta de modelo “discreto” (MD), uma vez que o mecanismo de geração de alvos e de sua destruição ocorrem em um particular instante de tempo. Para o MD, é assumido a distribuição de probabilidade truncada de Lévy e então implementada numericamente a correspondente evolução estocástica. Porém, antes de nos ater aos resultados das simulações, estabeleceremos equações gerais por meio de funções contínuas, suaves e dependentes do tempo para descrever as quantidades relevantes do MD.

Para definirmos a função que descreve o processo de criação, que denominaremos $N_c(t)$, devemos considerar uma função suave² que interpola um processo discreto cumulativo, isto é, a função $N_c(t)$ deve assegurar que

$$N_c(t = \tau_n) = \sum_{m=0}^{m=n} N_m. \quad (3.2)$$

Para a fenomenologia específica que discutiremos neste capítulo, que é a caracterização do transiente na direção dos estados estacionários, podemos supor que esse processo cumulativo discreto pode ser descrito por $\tau_n = n\tau$ e $N_n = 1 \ \forall n$, sem perda de generalidade. Dessa forma, a escolha da função que descreve o processo de criação de alvos no ambiente será dada por

$$N_c(t) = N_0 + \frac{t}{\tau}, \quad (3.3)$$

onde N_0 é o número inicial de alvos no ambiente. No início da busca por alvos, a fim de melhor poder analisar a dinâmica do ambiente, haverá somente um alvo disponível, isto é, $N_c(0) = N_0 = 1$.

O processo de aniquilação é caracterizado pela localização e remoção dos alvos colocados no ambiente. A aniquilação ocorre durante um certo intervalo aleatório de tempo, em que a duração desses intervalos de tempo não são necessariamente iguais. Considerando $N_a(t)$ uma dada função bem comportada que representa o total do número médio de

² smooth

alvos encontrados ao longo da área A no tempo t , segue que o número de $N(t)$ alvos no ambiente pode também ser descrito como a diferença entre o número de alvos colocados no ambiente (processo de criação) e o número de alvos encontrados pelo buscador (processo de aniquilação), isto é,

$$N(t) = N_c(t) - N_a(t). \quad (3.4)$$

Para desenvolvermos uma expressão para o processo de aniquilação, consideramos o ambiente de busca no estado estacionário. Nessa condição, o número de alvos disponíveis no ambiente permanece fixo e independente do tempo, ou seja, $N(t) = N_f$. Nessa condição, a distância típica média entre os alvos, dada pela Eq. 3.1, assume a forma independente do tempo, dada por $\xi_f = \sqrt{N_f/A}$. Ainda é possível a ocorrência de eventos estocásticos de aniquilação, porém, na condição estacionária para os alvos no ambiente, podemos considerar que, para cada alvo aniquilado, há a criação de um alvo aleatório no ambiente, tornando assim o número de alvos fixo.

Partindo dessa condição, podemos definir um tempo típico médio γ para a aniquilação de um alvo, que deve depender explicitamente da distância típica média ξ_f , isto é, $\gamma = \gamma(\xi_f) = \gamma_f$. Então, para um dado ξ_f , se tomarmos um curto intervalo de tempo $\Delta t < \gamma$ entre a aniquilação de dois alvos sucessivos, a probabilidade P_f de remoção do próximo alvo deve depender de Δt , isto é, $P_f(\Delta t) = \Delta t / \gamma(\xi_f)$. Note que se $\Delta t = 0$, $P_f = 0$ e se $\Delta t = \gamma(\xi_f)$, $P_f = 1$. Isso nos permite considerar $P_f(\Delta t)$ uma boa estimativa para a probabilidade do buscador encontrar um alvo quando a distância típica é fixa.

Podemos definir também uma dada distância média L_f percorrida entre dois alvos sucessivos. Esta distância média percorrida pelo forrageador é dado pelo produto do passo médio $\langle \ell(\lambda_f) \rangle$, dado pelo forrageador, e o número médio de passos percorridos $\mathcal{N}(\lambda_f)$, entre dois alvos, quando o ambiente atinge o regime estacionário. Se o buscador apresenta velocidade constante v , podemos considerar também $\gamma_f = L_f / v$. Essa distância média percorrida entre dois alvos, por sua vez, é dependente do livre caminho médio entre a detecção de dois alvos sucessivos que o forrageador executa, isto é,

$$\gamma_f = \frac{L_f}{v} = \frac{\langle \ell(\lambda_f) \rangle \mathcal{N}(\lambda_f)}{v}. \quad (3.5)$$

Considerando novamente o caso dependente do tempo, em que agora $N = N(t)$ e consequentemente $\xi = \xi(t)$, podemos assumir um intervalo de tempo muito curto $\left(s - \frac{\delta s}{2}, s + \frac{\delta s}{2}\right)$ em torno de um instante s . Desse modo, a probabilidade de eliminação de um alvo durante um infinitésimo de tempo δs é aproximadamente $\delta P(s) \approx \delta s / \gamma(\xi(s))$. Finalmente, tomando o limite $\delta s \rightarrow ds$ e supondo o intervalo de tempo $(0, t)$, uma aproximação de campo médio para o MD é dada por

$$N_a(t) = \int_0^t \frac{ds}{\gamma(\xi(s))}. \quad (3.6)$$

Derivando em relação ao tempo a Eq. 3.6, e considerando que em $t_0 = 0$ $N_a(0) = 0$, obtemos

$$\frac{d}{dt}N_a(t) = \frac{1}{\gamma(\xi(t))}. \quad (3.7)$$

Finalmente, da expressão para $N(t)$ juntamente com a Eq.3.7, obtém-se

$$\frac{d}{dt}N(t) = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\gamma(\xi(t))}. \quad (3.8)$$

Para obtermos a forma funcional de $\gamma(\xi(t))$, substituímos a Eq. 3.4 na Eq. 3.1, resultando em

$$\xi(t) = \sqrt{\frac{A}{N_c(t) - N_a(t)}}. \quad (3.9)$$

Uma vez conhecida a forma funcional de γ , com um dado $N_c(t)$, podemos, em princípio, resolver a Eq. 3.6 e obtermos $N(t)$ e $\xi(t)$. Além disso, o ambiente alcançará o regime estacionário quando o número de alvos for tal que, para cada alvo colocado, dado pela condição $N_c(t = T_{est})$, um alvo é encontrado pelo caminhanter aleatório $N_a(t = T_{est})$, onde T_{est} é o tempo estacionário, que resulta em

$$\gamma(\xi_{est}) = \gamma\left(\sqrt{\frac{A}{N_c(T_{est}) - N_a(T_{est})}}\right) = \tau. \quad (3.10)$$

Nesse caso, para $t \geq T_{est}$, a Eq. 3.8 fornece $N(t \geq T_{est}) = N(T_{est})$, tal que

$$N_a(t \geq T_{est}) \approx N_a(T_{est}) + \left(\frac{t - T_{est}}{\tau}\right). \quad (3.11)$$

Com $N_a(T_{est}) = N_0 + T_{est}/\tau - N(T_{est})$, a Eq.3.8 representa um modelo contínuo (MC) que constitui uma aproximação para o MD.

Estamos interessados em caracterizar o transiente de uma dinâmica estocástica até a sua configuração estacionária controlando o seu grau de difusividade. Para este fim, assumimos a distribuição de probabilidades do tipo lei de potência $P_\mu(\ell) = C_\mu \ell^{-\mu}$ com $r_v < \ell \leq \sqrt{A}$ e zero para o caso contrário, com $1 < \mu \leq 3$ e C_μ é constante de normalização.

No limite em que $\sqrt{A} \rightarrow \infty$, $P_\mu(\ell)$ representa o comportamento assintótico de longo alcance das distribuições de Lévy estáveis [77]. Nesse limite, para $\mu \geq 3,0$ a dinâmica de busca apresenta uma difusão normal. Por outro lado, o caráter superdifusivo adotado por um caminhanter corresponde a $1 < \mu < 3$, em que $\mu \rightarrow 1^+$ corresponde a dinâmica extremamente balística [4].

No modelo proposto, estamos assumindo de fato, uma área de tamanho finito. Contudo, a convergência dos voos de Levy truncados para uma estatística Gaussiana é extremamente lenta, desde que a soma do número de passos que seguem uma distribuição de Lévy truncada seja consideravelmente grande [7]. Por esta razão, se o tamanho da área for suficientemente grande e os intervalos de tempo forem longos as propriedades das estatísticas

de Levy não truncadas, em especial a superdifusividade, podem ser mantidas durante toda a evolução do transiente [78–81].

Para tal família de $P_\mu(\ell)$, dos modelos desenvolvidos em [40, 81, 82] para um ξ_f , podemos obter uma expressão para $\gamma(\xi(t))$. Para determinarmos a forma funcional de $\gamma(\xi(t))$ consideramos a Eq. 3.5, agora dependente do tempo,

$$\gamma(\xi_f) = \frac{\langle \ell(\lambda) \rangle \mathcal{N}(\lambda)}{v} \quad (3.12)$$

com

$$\langle \ell(\lambda) \rangle = \frac{r_v}{(2-\mu)} \left[\left(\frac{\lambda}{r_v} \right)^{2-\mu} - (\mu-1) \right] \quad (3.13)$$

e

$$\mathcal{N}(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{r_v} \right)^{\mu-1}. \quad (3.14)$$

Assim, considerando a Eq. 3.5 para o caso em que $\lambda_f = \xi_f^2/(2r_v)$ e $\mu \neq 2,0$ obtemos

$$\gamma(\xi_f) = \frac{r_v}{(2-\mu)v} \left[\left(\frac{\lambda_f}{r_v} \right) - (\mu-1) \left(\frac{\lambda_f}{r_v} \right)^{\mu-1} \right]. \quad (3.15)$$

Para o caso em que $\mu = 2,0$, tem-se $\gamma_f = \lambda_f[1 + \ln(\lambda_f/r_v)]/v$.

Dessa forma, na Eq.3.8, para obtermos uma forma funcional para $\gamma(\xi(t))$, usamos a expressão para γ_f , agora substituindo $\lambda_f \rightarrow \lambda(t)$. Note que o livre caminho médio, agora, depende do tempo, ou seja, $\lambda(t) = 1/2r_v\rho(t)$ onde $\rho(t)$ é a densidade de alvos no ambiente em um dado instante de tempo t , isto é, o número de alvos no ambiente no tempo t , distribuídos ao longo da área A . Sendo assim, podemos usar a relação $\rho(t) = [\xi(t)]^2$ para encontrarmos a forma funcional de $\gamma(\xi(t))$. Substituindo a Eq. 3.1 e a Eq. 3.4 na expressão para o livre caminho médio dependente do tempo, temos

$$\lambda(t) = \frac{A}{2r_v [N_c(t) - N_a(t)]}. \quad (3.16)$$

Por sua vez, substituindo as Eqs. 3.14 e Eq. 3.13 na equação Eq. 3.12 obtemos a forma funcional para $\gamma(\xi(t))$, e assim, finalmente a equação

$$\frac{d}{dt} N_a(t) = \frac{(2-\mu)v}{r_v \left[\left(\frac{A}{2r_v^2 \left[1 + \frac{t}{\tau} - N_a(t) \right]} \right)^{2-\mu} - (\mu-1) \left(\frac{A}{2r_v^2 \left[1 + \frac{t}{\tau} - N_a(t) \right]} \right)^{\mu-1} \right]}, \quad (3.17)$$

que caso, resolvida, possibilita-nos encontrar a forma funcional para o número de alvos encontrados pelo forrageador no ambiente. Com isso é possível predizer, de maneira teórica, características importantes do processo de busca, como, por exemplo, qual a dinâmica do número de alvos no ambiente até atingir o regime estacionário.

A Eq. 3.17 representa um conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com três parâmetros constantes, v, r_v e A , e dois parâmetros variáveis μ e τ , em que, para diferentes valores do parâmetro τ e diferentes estratégias de busca, dadas pelo parâmetro μ , em que $1 < \mu \leq 3$, obtêm-se diferentes soluções para $N_a(t)$.

Podemos reescrever a Eq. 3.17 de modo a torná-la mais simples. Para isso derivamos a Eq. 3.4, obtendo

$$\frac{d}{dt}N_a(t) = \frac{1}{\tau} - \frac{d}{dt}N(t). \quad (3.18)$$

Substituindo a Eq. 3.18 na Eq. 3.17 obtemos

$$\frac{1}{\tau} - \frac{d}{dt}N(t) = \frac{1}{\frac{1}{v} \frac{r_v}{(2-\mu)} \left[\left(\frac{A}{2r_v^2 N(t)} \right) - (\mu-1) \left(\frac{A}{2r_v^2 N(t)} \right)^{\mu-1} \right]}, \quad (3.19)$$

multiplicando e dividindo o denominador da Eq. 3.19 pela expressão $2r_v A$ e fazendo $\beta = A/2r_v v$ e $\alpha = 2r_v^2/A$, podemos reescrevê-la na forma

$$\frac{1}{\tau} - \frac{d}{dt}N(t) = \frac{1}{\frac{\beta\alpha}{(2-\mu)} \left[\frac{1}{\alpha N(t)} - (\mu-1) \left(\frac{1}{\alpha N(t)} \right)^{(\mu-1)} \right]}. \quad (3.20)$$

Fazendo agora $\alpha N(t) = x(t)$ e $\beta\alpha/\tau = c$ obtemos uma forma simplificada para a Eq. 3.17

$$\beta \frac{d}{dt}x(t) = c + \frac{(\mu-2)}{[(x(t))^{-1} - (\mu-1)(x(t))^{1-\mu}]}, \quad (3.21)$$

ou, na forma integral

$$\int_{\alpha N_0}^{\alpha N(t)} \left[1 - \frac{\beta(\mu-2)x}{[1 + (1-\mu)x^{2-\mu}] + \beta(\mu-2)x} \right] dx = \frac{\alpha}{\tau} t. \quad (3.22)$$

Uma vez resolvida, a Eq. 3.22 fornece o número de alvos no ambiente e, consequentemente, o número de alvos que o buscador encontra para cada estratégia de busca. Podemos notar na Eq. 3.22 que, para a estratégia de busca $\mu = 2,0$, temos uma indeterminação matemática. Este problema é contornado aplicando o teorema de L'Hospital.

A integral na Eq. 3.22 pode ser resolvida para diferentes valores de μ entre $1,0 \leq \mu \leq 3,0$. Em especial, resolveremos para $\mu = 1, 3/2, 2, 5/2$ e 3 . Dessa forma, após resolver a integral na Eq. 3.22, em princípio poderíamos obter uma expressão fechada para $N(t)$,

por meio de uma apropriada inversão do resultado da Eq. 3.22, permitindo escrever N em função de t . Mas se a inversão analítica proposta não for possível, a relação resultante da solução da Eq. 3.22 é, ao menos, facilmente resolvida por meio de métodos numéricos.

Nas próximas seções apresentaremos as soluções da Eq. 3.22 para diferentes estratégias de busca e diferentes valores da distância típica τ percorrida pelo forrageador. As comparações dos resultados obtidos por meio do modelo analítico com os obtidos das simulações computacionais (MD), mostram que a aproximação proposta pelo modelo contínuo (MC) prediz de maneira satisfatória a dinâmica do ambiente até alcançar o regime estacionário.

3.3 Resultados

Nesta seção apresentamos os resultados do modelo analítico e os comparamos com os resultados provenientes das simulações computacionais. De um modo geral, as simulações computacionais levam em consideração fatores que contribuem para uma descrição mais realista dos sistemas, como por exemplo, flutuações estocásticas presentes em sistemas fora do equilíbrio. Dividimos esta seção em três seções distintas: a primeira seção apresenta os resultados do MC para a estratégia de busca, $\mu = 1,0$. Para esta estratégia o modelo exibe solução exata. Na segunda seção, apresentamos os resultados obtidos para as demais estratégias de busca. Por fim, na terceira seção apresentamos os resultados da eficiência de busca, oriundos do modelo contínuo e os comparamos com os resultados obtidos por meio das simulações computacionais que descrevem o MD.

3.3.1 Caracterização da dinâmica durante o transiente para a estratégia de busca $\mu = 1,0$

Estamos interessados na caracterização da dinâmica do transiente, bem como entender a influência da estratégia de busca μ e da distância característica λ , utilizadas pelo buscador, para que o ambiente alcance uma configuração estacionária no número de alvos disponíveis. O modelo possui cinco parâmetros: o raio de visão $r_v = 1,0$ (fixo), a velocidade do buscador $v = 1,0$ (fixo), o tamanho da área do ambiente $A = 10^8$ (fixo), a distância característica λ (variável) e a estratégia de busca μ (variável). Desse modo, a estratégia de busca μ e a distância característica λ determinarão o quão rápido o sistema alcançará o regime estacionário.

A condição estacionária para o número de alvos no ambiente pode ser identificada quando a quantidade total de alvos disponíveis permanece constante, indicando que a distância média percorrida entre dois alvos é igual ao livre caminho médio. Para caracterizar a dinâmica do transiente, resolvemos a Eq. 3.21. Para a estratégia de busca $\mu = 1,0$, a equação apresenta solução exata. Substituindo $\mu = 1,0$ na equação obtemos

$$\beta \frac{d}{dt} x(t) = c - x(t) \quad (3.23)$$

cuja solução exata é

$$x(t) = c + [x(0) - c]e^{-\frac{t}{\beta}}. \quad (3.24)$$

Sabendo que $x(t) = \alpha N(t)$ e substituindo os respectivos valores de c e β obtemos

$$N(t) = \frac{A}{2r_v v \tau} + \left(1 - \frac{A}{2r_v v \tau}\right) e^{-\frac{2r_v v}{A} t}. \quad (3.25)$$

Podemos observar que para o instante inicial ($t = 0$) temos o número de alvos inicial no ambiente, isto é, $N(0) = N_0 = 1$. Na condição de estacionariedade, quando $t \rightarrow \infty$, o termo exponencial vai a zero e obtemos a equação

$$N(t) = \frac{A}{2r_v v \tau}. \quad (3.26)$$

A Eq. 3.25 sugere que o comportamento do transiente para $N(t)$ é caracterizado pelo termo exponencial e, após um intervalo de tempo específico, o número de alvos no ambiente se torna constante e é descrito pela Eq. 3.26. Chamamos a atenção para a relação inversa entre o número de alvos disponíveis no ambiente e o tempo característico τ para a criação dois alvos sucessivos, evidente na Eq. 3.26. Esta relação mostra que, para os diferentes valores de τ , a quantidade de alvos no ambiente estacionará em um valor constante e inversamente proporcional à distância característica λ , uma vez que $\tau = \lambda$. Na figura 3.2 mostramos o número de alvos no ambiente em função do tempo para diferentes valores de λ .

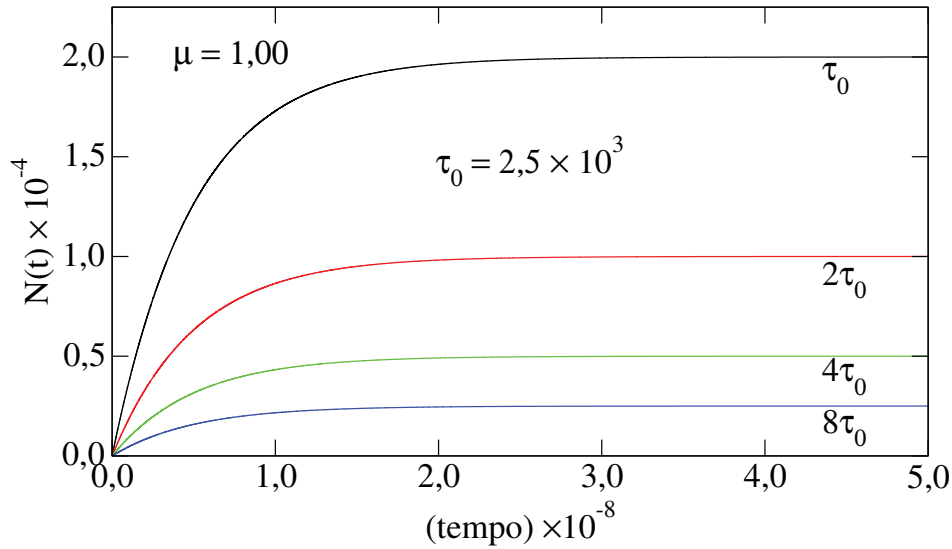


Figura 3.2 – Número de alvos no ambiente em função do tempo. A distância característica λ determina o quão rápido o ambiente alcança o estado estacionário. A configuração com λ grande atinge a estacionariedade mais rapidamente porque o caminhante percorre maiores distâncias e, com uma estratégia de busca balística encontra mais alvos, fazendo com que no ambiente permaneça uma quantidade menor de alvos. Note que os valores estacionários são inversamente proporcionais a λ .

Podemos observar que o número de alvos disponíveis estaciona mais rapidamente para valores de distâncias características maiores. Isso ocorre porque, para valores grandes

da distância característica combinados a uma estratégia de busca balística ($\mu = 1,0$), o buscador percorre grandes distâncias, favorecendo o encontro de alvos, e assim, fazendo com que a densidade de alvos no ambiente estacione mais rapidamente. De modo contrário, isto é, para valores de λ menores, o buscador percorre distâncias menores, contribuindo para o aumento da densidade de alvos no ambiente, e conseqüentemente, levando a um número maior de alvos no estado estacionário.

Na figura 3.3 mostramos o número de alvos disponíveis no ambiente em função do tempo para o modelo analítico em comparação com as simulações computacionais, para diferentes distâncias características e a mesma estratégia de busca $\mu = 1,0$. Na simulação computacional, o cálculo do tamanho médio do passo, descrito pela Eq. 2.75, diverge para $\mu = 1,0$. Por isso, para compararmos os resultados obtidos pelo modelo analítico e pela simulação computacional, usamos, na simulação computacional, $\mu = 1,01$.

Comparando os dois gráficos na figura 3.6, vemos que há flutuações para a simulação computacional, principalmente para valores menores de τ , enquanto que, para o modelo analítico, as curvas são suaves. Isso ocorre porque, na simulação, ocorrem flutuações devida a estocasticidade inerente ao problema. No modelo analítico, o forrageador percorre uma distância característica considerada fixa. Na simulação esta distância percorrida, varia consideravelmente.

A causa para estas flutuações estocásticas reside na maneira como é calculado o comprimento médio do passo de um único voo que o caminhante executa, o valor de $\langle \ell \rangle$, para ambos os casos. No modelo analítico, é utilizada uma aproximação de campo médio, para o cálculo do valor de $\langle \ell \rangle$. A consequência desse fato é que um novo alvo será encontrado pelo buscador sempre que este percorrer uma distância com o valor igual a distância característica λ . Dessa forma, os voos que o caminhante executa serão sempre truncados com o valor igual a distância característica. O que já não ocorre no caso da simulação computacional.

Nas simulações computacionais, se um alvo não se encontra no raio de visão do buscador, este escolhe uma direção aleatória e dá um passo de tamanho ℓ_j , de acordo com a Eq. 2.73. Disso decorre que, no início da busca, devido a baixa densidade de alvos no ambiente, o comprimento dos passos são maiores. À medida que a densidade de alvos aumenta, a frequência com que os passos são truncados é maior e conseqüentemente o tamanho dos passos se torna menor. Em suma, na simulação computacional, os passos são maiores no começo da busca e se tornam cada vez menores à medida que a densidade de alvos no ambiente aumenta.

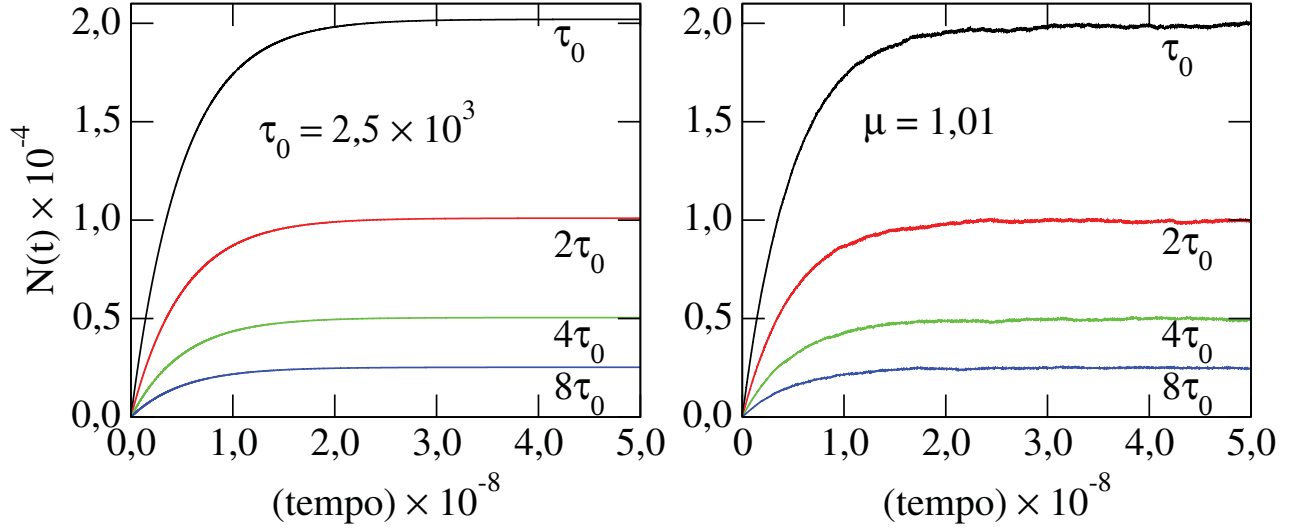


Figura 3.3 – O número de alvos disponíveis como função do tempo para **a)** modelo analítico e na simulação computacional **b)**. A estocasticidade inerente ao problema leva à flutuações nos alvos disponíveis no ambiente.

Obtida a equação para o número de alvos disponíveis no ambiente podemos encontrar a equação para o número de alvos encontrados pelo buscador. Substituindo a Eq. 3.4 na Eq. 3.25 obtemos

$$N_a(t) = 1 - \frac{A}{2r_v v \tau} + \frac{t}{\tau} - \left(1 - \frac{A}{2r_v v \tau}\right) e^{-\frac{2r_v v}{A} t}. \quad (3.27)$$

De modo semelhante à Eq. 3.25, a Eq. 3.27 sugere que o comportamento durante o transiente para o número de alvos que o caminhante encontra é caracterizado pelo termo exponencial, mas desta vez somado a um termo linear. Note que para $t = 0$, teremos $N_a(0) = 0$, e para $t \rightarrow \infty$, caso em que o sistema alcança o regime estacionário, $N_a(t)$ respeita a Eq. 3.11, isto é, para cada distância típica τ percorrida pelo forrageador, o número de alvos encontrados acresce em uma unidade, ou seja, $N_a(T_{est} + n\tau \geq T_{est}) = N_a(T_{est}) + n$, onde n é o número de alvos que o forrageador encontra após percorrer a distância típica $n\tau$.

Em princípio, poder-se-ia argumentar, do ponto de vista matemático, que $N_a(t) \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow \infty$. Entretanto, do ponto de vista físico, estamos interessados em observar o comportamento do sistema quando este alcança a configuração estacionária. Na estacionariedade, conforme já mencionamos, ainda há a localização e a remoção de alvos, tanto quanto a criação de alvos no ambiente. No entanto, para cada alvo encontrado e removido, um alvo é criado, fazendo com que o número de alvos no ambiente permaneça constante.

De outro modo, podemos observar na Eq. 3.27 que, durante o transiente, isto é, antes do sistema alcançar o regime estacionário, o termo exponencial domina o encontro de alvos no ambiente e, após o tempo T_{est} , o termo exponencial tende a zero e o comportamento de $N_a(t)$ é linear, cuja a inclinação da reta é dada por $1/\tau$.

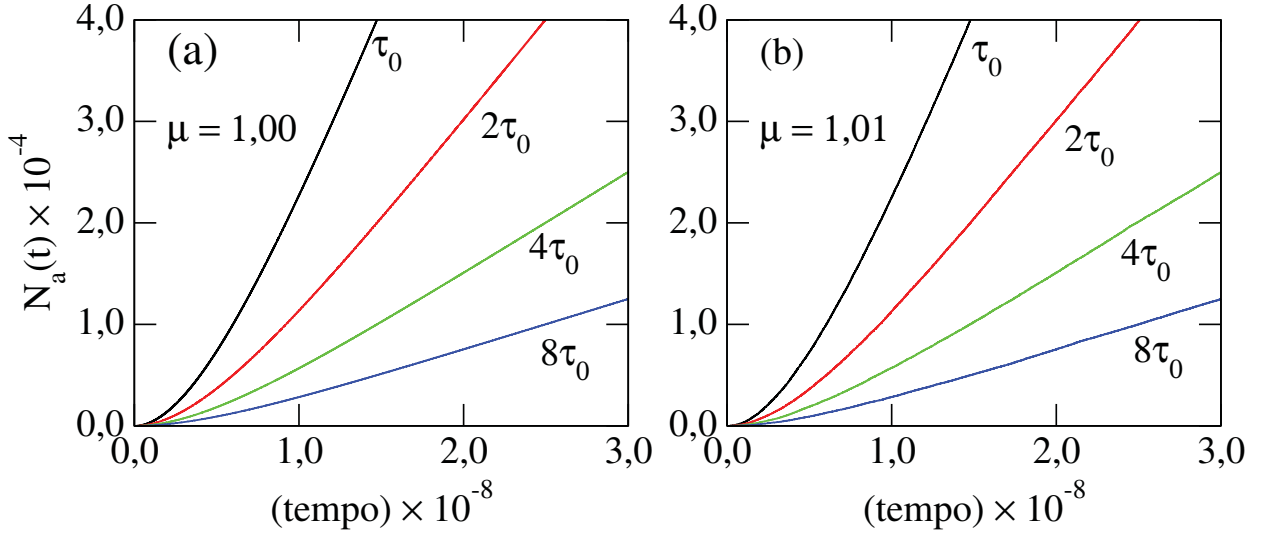


Figura 3.4 – Número de alvos detectados em função do tempo para diferentes distâncias características e estratégia de busca balística, obtidas por meio do modelo analítico **a)** e pelas simulações computacionais **b)**. Os resultados obtidos no modelo analítico reproduzem, com boa concordância, os resultados obtidos nas simulações. Observa-se que durante o tempo transiente, o número de alvos detectados é governado pelo termo exponencial de acordo com a Eq. 3.27. Após o tempo transiente, o número de alvos detectados é governado pelo termo linear na Eq. 3.27.

A figura 3.4 mostra o número de alvos detectados pelo caminhante para diferentes distâncias características e estratégia de busca balística. Nesta figura mostramos a comparação entre os resultados obtidos pelo modelo analítico (item **b)**, resultantes da Eq. 3.27, e os resultados obtidos por meio das simulações computacionais (item **a)**. Comparando os resultados obtidos pelo modelo analítico, vemos uma boa concordância com os resultados provenientes das simulações computacionais.

Mostramos na figura 3.5 os instantes de tempo em que o número de alvos encontrados pelo buscador alcança o estado estacionário. Para a estratégia de busca $\mu = 1,0$, vemos que para um valor menor da distância característica, por exemplo, $\lambda = 2500$, o tempo estacionário é $T_{est} \approx 10^8$. Já para um valor maior, $\lambda = 20000$, temos $T_{est} \approx 10^7$. Assim o tempo para alcançar a estacionariedade é menor para distâncias características maiores, evidenciando a relação inversa entre $N(t)$ e λ mostrada na figura 3.5.

Para o cálculo dos tempos estacionários no modelo analítico, empregamos o método de Runge-Kutta de 4ª ordem à Eq. 3.18, obtendo os tempos em que a diferença do valor absoluto entre a derivada de $N_a(t)$ e a quantidade $1/\tau$ é menor do que 10^{-5} . Para a obtenção dos tempos estacionários na simulação computacional, devido a estocasticidade inerente ao problema, calculamos o coeficiente angular das curvas da figura 3.4-**b** por meio da expressão

$$\frac{|N\Delta t_M - M\Delta t_N|}{\Delta t_N (\Delta t_N + \Delta t_M)} \leq \delta. \quad (3.28)$$

A equação acima expressa a diferença entre os coeficientes angulares ao longo de uma determinada curva da figura 3.4-b. Considerando os N valores de alvos detectados no seu respectivo intervalo de tempo Δt_N , e considerando os $N + M$ valores tomados entre o intervalo de tempo $\Delta t_N + \Delta t_M$, a Eq. 3.28 representa a diferença entre os coeficientes angulares quando estes são menores ou iguais a precisão desejada, indicada por δ .

De $\lambda = 2500$ à $\lambda = 10000$, devido ao comportamento exponencial ser mais pronunciado, os tempos estacionários foram calculados considerando $N = M = 10000$ e $\delta \sim 10^{-6}$. Contudo, para $\lambda = 20000$, caso em que o comportamento da curva é mais suave, isto é, o comportamento exponencial e linear é menos pronunciado, o tempo estacionário foi calculado usando $N = M = 75$ e $\delta \sim 10^{-8}$.

Para este caso em específico, é necessário diminuir o intervalo de valores considerados para o cálculo do coeficiente angular porque, se tomarmos valores grandes para os intervalos, o primeiro valor calculado será aquele em que o número de alvos detectados já se encontra no estado estacionário, ou seja, o tempo estacionário será aquele em que o número de alvos detectados pelo forrageador é regido pelo termo linear.

Por isso diminuimos o valor dos intervalos e aumentamos a precisão em duas ordens de grandeza em relação aos cálculos realizados com as outras distâncias características. No modelo analítico podemos observar que, para $\lambda = 2500$, o tempo estacionário é $T_{est} = 1,29 \times 10^8$ enquanto que na simulação computacional o tempo estacionário é $T_{est} = 1,11 \times 10^8$.

Comparando os dois resultados, o erro relativo, tomando o tempo estacionário da simulação como valor de referência, é de $\epsilon = 14\%$. Já para $\lambda = 20000$, o tempo estacionário obtido no modelo analítico é $T_{est} = 2,55 \times 10^7$ e na simulação computacional é $T_{est} = 2,70 \times 10^7$, com um erro relativo de $\epsilon = 5,5\%$.

Mesmo com um erro relativo sendo consideravelmente grande em alguns casos, as ordens de grandeza na simulação computacional e no modelo analítico mostram uma boa concordância entre si. Para outras estratégias de busca, a Eq. 3.22 não possui solução analítica. Na próxima seção, discutiremos as soluções numéricas desta equação para as demais estratégias de busca e compararemos com os resultados obtidos no modelo analítico e nas simulações computacionais.

Veremos que a aproximação de campo médio utilizada no cálculo do comprimento de passo médio do caminhante causa divergência nas comparações entre as quantidades obtidas por meio dos dois diferentes métodos. Mais adiante, apresentaremos uma relação entre as estratégias de busca do modelo analítico e da simulação computacional, necessária à correção dessa divergência.

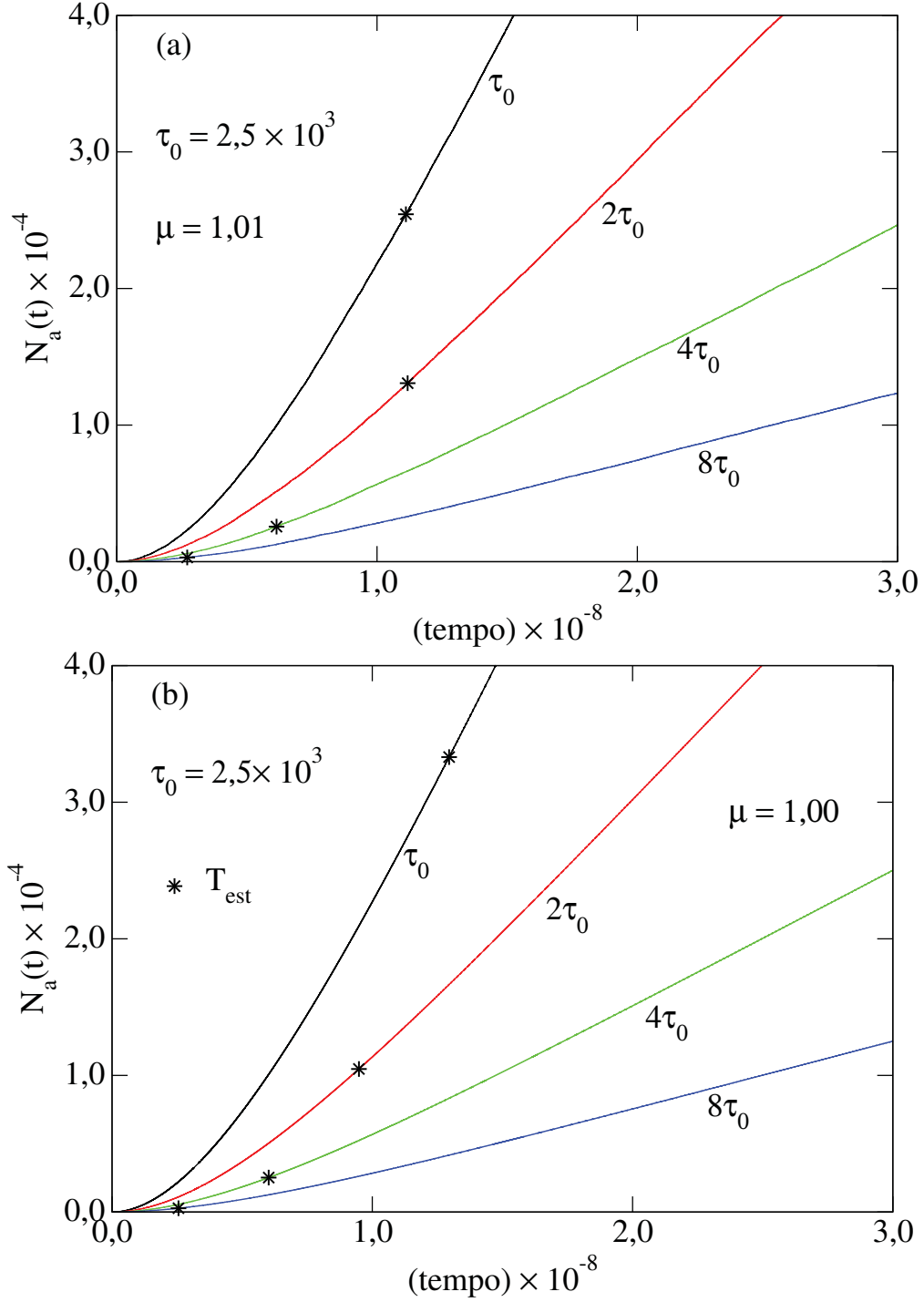


Figura 3.5 – Comparativo entre os tempos estacionários obtidos por meio das simulações computacionais em **a)** e por meio do modelo analítico **b)**. Para $\lambda = 5000$, o tempo estacionário obtido no modelo analítico é $T_{est} = 0,950 \times 10^8$ e na simulação é $T_{est} = 1,12 \times 10^8$, com um erro relativo $\epsilon = 15\%$, tomando o tempo estacionário da simulação computacional como valor de referência. No caso em que $\lambda = 10000$, o modelo analítico exibe um tempo estacionário $T_{est} = 6,02 \times 10^7$, e a simulação exibe $T_{est} = 6,13 \times 10^7$ com um erro relativo $\epsilon = 1,8\%$.

3.3.2 Caracterização da dinâmica durante o transiente para diferentes estratégias de busca

Vimos na seção anterior que, para a estratégia de busca $\mu = 1,0$, a Eq. 4.3 possui solução exata. Para as demais estratégias de busca, a solução analítica não é possível. Para encontrarmos as soluções para as demais estratégias de busca, resolvemos a Eq. 4.3 numericamente, empregando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Conforme havíamos mencionado anteriormente, há uma descontinuidade na Eq. 4.3 para $\mu = 2,0$. Para lidar com essa descontinuidade, aplicamos o teorema de L'Hospital na Eq. 4.3, obtendo

$$\beta \frac{d}{dt} x(t) = c - \frac{x(t)}{1 - \ln [x(t)/\alpha A]} . \quad (3.29)$$

Na figura 3.6 mostramos a variação temporal do número de alvos no ambiente considerando $1 < \mu \leq 2,0$, e diferentes valores de distância característica na simulação computacional, em comparação com o modelo analítico. As linhas contínuas descrevem as curvas obtidas por meio das simulações computacionais. Já as curvas tracejadas, indicam as curvas obtidas por meio do modelo analítico.

De maneira análoga à estratégia de busca descrita pelo expoente $\mu = 1,0$, a dinâmica do ambiente, durante o transiente, para as demais estratégias, é caracterizada pelo comportamento de tipo exponencial. Vemos que o número de alvos no ambiente alcança a estacionariedade mais rápido para o caso em que o expoente tende ao regime balístico, isto é, $\mu \rightarrow 1,0^+$. Tanto na simulação computacional quanto no modelo analítico, o número total de alvos, na configuração estacionária, é menor nos casos em que o valor de τ é maior. Desse modo, o expoente μ e a distância característica τ , determinarão quão rápido o sistema alcança a configuração estacionária.

Na simulação, quando o número de alvos no ambiente é baixo, o expoente $\mu = 1,01$, faz com que caminhante ajuste, mais rápido, a distância média percorrida entre dois alvos para coincidir com o livre caminho médio. Isso porque, estratégias de busca próximas do regime balístico, a frequência de ocorrência de passos grandes é maior do que a ocorrência de passos de tamanho pequeno. Isso faz com que o caminhante percorra uma distância maior no ambiente e, dessa forma, aumente a chance de encontrar os alvos.

Na estacionariedade, o livre caminho médio deve ser igual ao produto do número de passos dados, entre dois alvos sucessivos, pelo tamanho médio desses passos. Dessa forma, a configuração estacionária dependerá do tamanho do livre caminho médio. Uma vez que um alvo é criado no ambiente cada vez que o caminhante percorre uma distância característica λ , e esta distância está vinculada ao tempo característico para a criação de um alvo, dado pela relação $\lambda = \tau$, o ambiente alcança o regime estacionário quando menos alvos são criados no ambiente.

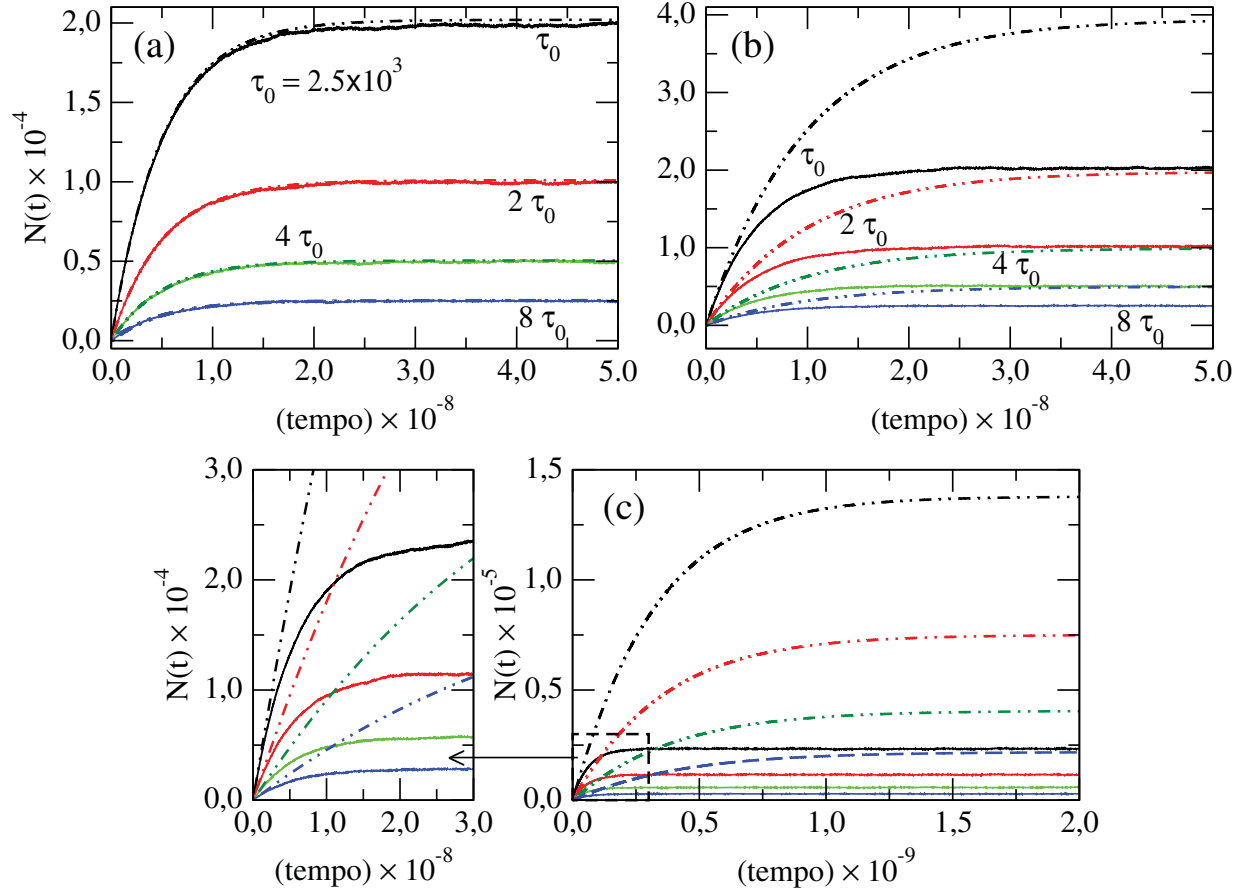


Figura 3.6 – Número de alvos no ambiente em função do tempo para várias estratégias de busca e diferentes distâncias características, designadas por $\tau = \tau_0 = 2,5 \times 10^3$ (curvas em preto), $\tau = 2\tau_0$ (curvas em vermelho), $\tau = 4\tau_0$ (curvas em verde) e $\tau = 8\tau_0$ (curvas em azul). As curvas contínuas representam os resultados obtidos por meio das simulações computacionais, enquanto que, as linhas tracejadas representam as curvas obtidas por meio do modelo analítico. No item (a) $\mu = 1.01$, (b) $\mu = 1.5$ e (c) $\mu = 2.0$. A caixa destacada no item (c), mostra a comparação entre a estacionariedade sendo alcançada no começo das simulações, e sendo alcançada no começo do modelo analítico.

Além disso, vimos que para a estratégia totalmente balística (Eq. 3.26), na estacionariedade, o número de alvos no ambiente é $N(t \geq T_{est}) \propto 1/\tau$. Essa relação pode ser vista, também, nos resultados da simulação na qual, no regime estacionário, vale a relação $\lambda = N\langle\ell\rangle$. Por exemplo, no item (a), a curva em preto, contínua, mostra $N(T_{est}) \approx 18000$ e a tracejada mostra $N(T_{est}) = 20000$, para $\tau = 2500$. Já para $\tau = 20000$, temos $N(T_{est}) \approx 2500$, descrita pela curva azul, contínua e tracejada.

No modelo analítico, que funciona como uma primeira aproximação do sistema simulado, o comportamento das grandezas que caracterizam o sistema, são obtidos por meio das soluções de equações diferenciais, como por exemplo, a Eq. 3.25. A aproximação de campo médio, descrita pela equação Eq. 3.6, informa a probabilidade de encontrar um novo alvo em um determinado instante de tempo (por meio da variação de γ como função de $\xi(t)$).

Isso significa que eventuais flutuações na distribuição espacial de ξ não são consideradas.

Devido à aleatoriedade nas posições dos alvos criados, heterogeneidades temporárias na distribuição espacial podem ocorrer na simulação. Sobretudo em um ambiente com uma configuração de baixa densidade de alvos. Contudo, se o caminhante é eficaz na exploração do ambiente, a sua própria dinâmica de busca atenua tais inomogeneidades. Sabe-se que quando um processo de busca é não destrutivo, o expoente que otimiza a eficiência de busca é $\mu_{opt} \approx 2,0$. Porém, quando a busca é destrutiva, o expoente que otimiza a estratégia de busca é $\mu \rightarrow 1,0$ [83]. Portanto, podemos esperar que o modelo analítico concorde melhor com os resultados obtido por meio das simulações, para valores de μ 's menores, porque é quando o caminhante exibe uma busca de caráter mais superdifusivo.

Por outro lado, à medida que o valor do expoente μ se distancia da estratégia de busca balística, o ambiente alcança a configuração estacionária mais lentamente. É o que podemos observar nos itens (b) e (c) da figura 3.6, tanto nos resultados obtidos pelas simulações computacionais quanto os resultados obtidos do modelo analítico.

Isso ocorre porque estratégias de busca próximas do regime balístico são mais superdifusivas do que estratégias próximas ao regime browniano, isto é, estratégias nas quais o expoente $\mu \rightarrow 3,0^-$. Desse modo, o tempo para o ambiente alcançar o limite estacionário assim como o número de alvos nesse limite, aumentam, a medida em que o valor de μ cresce, e diminuem quando o valor de τ aumenta.

À medida que a estratégia de busca se distancia do regime balístico, conforme vemos no item (c), observa-se uma discordância entre os dois métodos. Ainda assim o modelo analítico é relevante pela seguinte razão: Diferentes fenômenos apontam a dificuldade em se encontrar alvos em movimento [84–89]. Foi anteriormente mostrado [85–90] que certos resultados qualitativos para alvos fixos são semelhantes àqueles com os alvos em movimento se o expoente μ do caminhante para o caso em que os alvos são fixos, for menor do que o expoente para o caso em que os alvos se movimentam [87]. Além disso, para alvos em movimento a aproximação de campo médio tende a funcionar para um amplo intervalo de valores de μ . Desse modo, o modelo analítico pode ser interpretado como uma primeira aproximação da simulação, em que os alvos, uma vez criados, passam por uma rápida homogenização por meio de difusão.

Na figura 3.7 mostramos a evolução temporal do número de alvos encontrados, para uma distância característica fixa, $\tau = 2500$, e diferentes estratégias de busca. Nota-se que, conforme as estratégias de busca tendem ao limite browniano, o termo exponencial que caracteriza o comportamento da dinâmica no transiente é mais proeminente, evidenciando que o tempo transiente na estratégia balística é menor. Os itens de (a) – (c) mostram que à medida que μ cresce, $N_a(t)$ no modelo discreto é sistematicamente maior do que no modelo contínuo. É possível notar que $dN_a(t)/dt$ aumenta monotonicamente de zero à um valor máximo de $1/\tau$, após $t \geq T_{est}$.

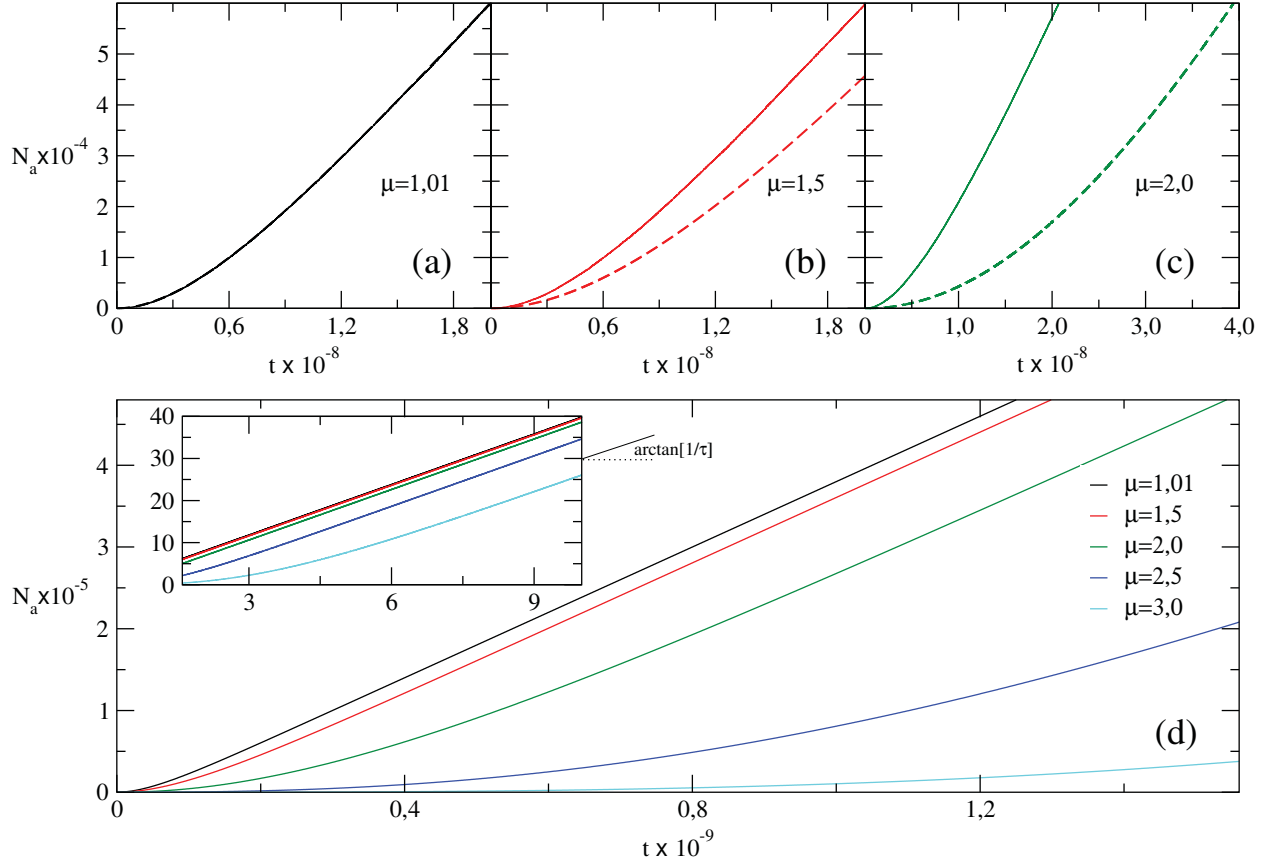


Figura 3.7 – Evolução temporal do número de alvos encontrados pelo caminhante para diferentes estratégias de busca e distância característica $\tau = 2500$. À medida que $\mu \rightarrow 3,0$, o número de alvos que o caminhante encontra leva mais tempo para alcançar o regime estacionário. Os itens de (a) à (c) mostram as comparações entre o modelo discreto (linhas contínuas) e modelo contínuo (linhas tracejadas). A caixa destacada mostra os tempos próximos a T_{est} , após os quais $N_a(t)$ cresce linearmente com coeficiente angular $\tan(1/\tau)$.

Na figura 3.8 mostramos os instantes de tempo em que o número de alvos encontrados pelo caminhante alcança o regime estacionário. Estes instantes de tempo foram calculados por meio do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, quando o valor absoluto da diferença entre a taxa de variação de $N_a(t)$ e o coeficiente angular da reta, $1/\tau$, que rege o encontro de alvos no regime estacionário, se torna muito próximo de zero com uma precisão $\delta \approx 10^{-5}$.

No modelo contínuo, o truncamento no comprimento dos voos ocorre sempre em um valor igual à distância característica τ . Nas simulações, inicialmente os voos são maiores e, como a densidade de alvos é baixa, o voo é truncado poucas vezes. Ainda referente às simulações, à medida que a densidade de alvos no ambiente alcança o regime estacionário as chances de o caminhante encontrar os alvos aumenta e, conseqüentemente, a frequência do truncamento dos voos, também. No limite estacionário o tamanho dos voos é igual ao livre caminho médio.

Para $\mu = 1,0$, o instante de tempo em que o número de alvos alcança a estacionari-

idade é $T_{est} \approx 1,8 \times 10^8$, enquanto que, para a estratégia $\mu = 3,0$, o instante de tempo é $T_{est} \approx 7,0 \times 10^9$.

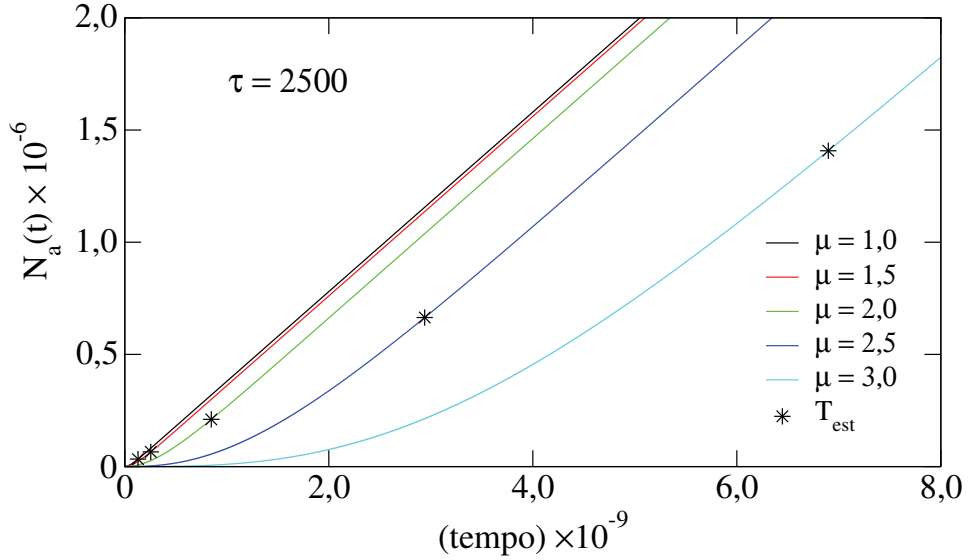


Figura 3.8 – Número de alvos encontrados para diferentes estratégias de busca e distância característica fixa $\tau = 2500$. Os asteriscos marcam os instantes de tempo em que o encontro de alvos entra no regime estacionário, isto é, quando o módulo da diferença entre a taxa de variação de $N_a(t)$ e o coeficiente angular da reta $1/\tau$, é aproximadamente zero com precisão $\delta \sim 10^{-5}$.

Quando o número de alvos no ambiente alcança a configuração estacionária, o comprimento dos voos no modelo discreto é igual a distância característica τ . O que já não ocorre no modelo contínuo, em que é aplicado o método de Runge-Kutta para resolver a Eq. 3.17. Esta equação considera que o tamanho da distância característica τ terá sempre o mesmo comprimento.

Realizamos uma análise comparativa entre as estratégias de busca empregadas no MC e no MD, a fim de sabermos quais as estratégias de busca no modelo contínuo descrevem o comportamento das estratégias de busca no MD. Para isso, observamos o número de alvos encontrados pelo caminhante em função do tempo para uma dada distância característica fixa, $\tau = 2500$, e analisamos qual é a estratégia de busca que, se ajusta melhor à estratégia de busca empregada na simulações computacionais.

O resultado pode é mostrado na figura 3.9. A linha contínua preta, em cada um dos gráficos, descreve a estratégia de busca utilizada no modelo discreto (μ_{MD}), enquanto que a linha pontilhada em vermelho indica a estratégia de busca empregada no modelo contínuo (μ_{MC}).

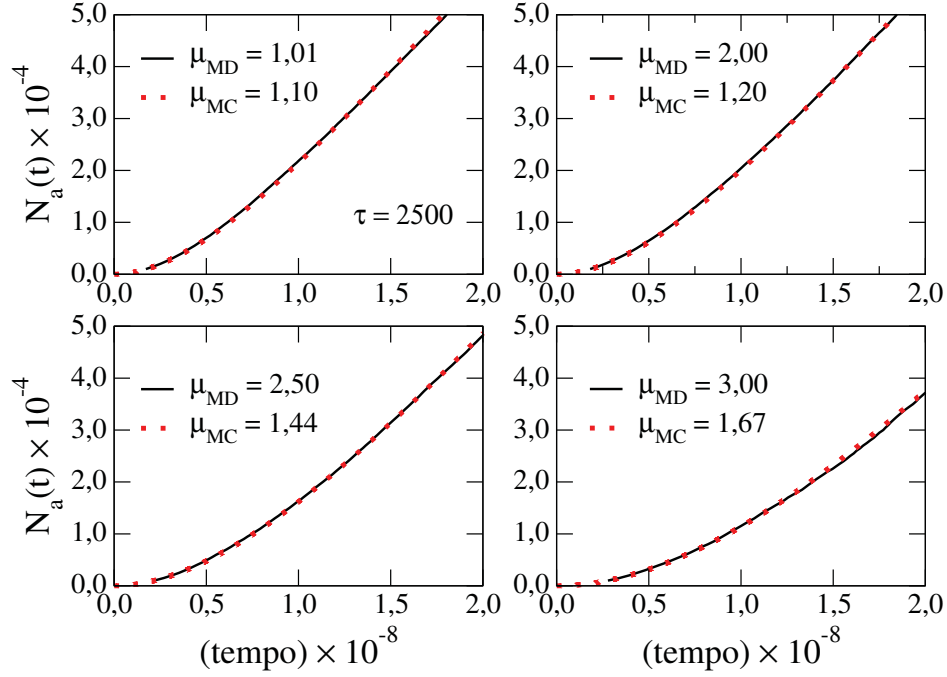


Figura 3.9 – Comparação entre estratégias de busca utilizadas no modelo discreto, por meio das simulações computacionais, e no modelo contínuo, por meio de integrações numéricas. A linha preta indica a estratégia de busca utilizada no MD. A linha vermelha pontilhada indica a estratégia utilizada em no MC. A comparação foi realizada utilizando a distância característica $\tau = 2500$.

Vemos que há uma boa concordância entre o nosso modelo e a simulação computacional para o caso mais próximo da estratégia balística. Podemos observar também que as estratégias de busca do nosso modelo que melhor se ajustam às estratégias de busca utilizadas na simulação computacional estão mais próximas da estratégia balística.

Podemos perceber, por meio da figura 3.9, que para cada valor da estratégia de busca utilizada para calcular o número de alvos encontrados por meio da Eq. 3.16, há um valor que se ajusta melhor à estratégia de busca empregada para calcular o número de alvos na simulação computacional.

Com o intuito de generalizar a compreensão sobre a influência da aproximação de campo médio em nosso modelo, e de entender quais são as estratégias de busca que, em nosso modelo, se ajustam melhor às estratégias de busca utilizadas na simulação computacional, propomos uma fórmula que corrige as estratégias de busca utilizadas em nosso modelo, ajustando-as à simulação computacional. O resultado é mostrado na figura 3.10.

Os pontos em preto na figura 3.10 mostram quais os valores dos expoentes que descrevem a estratégia de busca em no modelo contínuo que se ajustam aos valores obtidos na simulação computacional para diferentes distâncias características τ . O ajuste dos pontos foi feito usando o recurso de *fitting* de dados do software Gnuplot versão 4.6 e a forma funcional proposta para o ajuste foi uma função do tipo

$$\mu_{MD} = A + B \mu_{MC} + C \ln(\mu_{MC} - D). \quad (3.30)$$

Na Eq. 3.30, μ_{MD} e μ_{MC} são as estratégias de busca usadas na simulação computacional e em no modelo contínuo (resolvidas numericamente), respectivamente, e A , B , C e D são constantes. As curvas na figura 3.10 que descrevem o ajuste destes pontos e as suas formas funcionais, juntamente com as constantes que ajustam os valores, são mostradas na tabela 3.3.2.

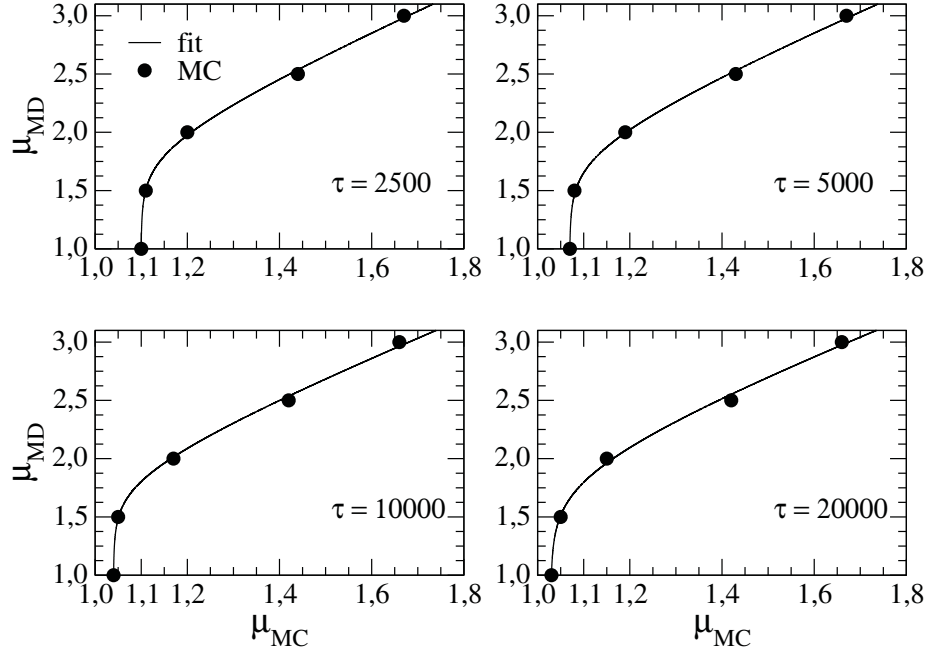


Figura 3.10 – Ajuste da curva para as estratégias de busca utilizando o método numérico para a solução da Eq. 3.17. Os pontos em pretos indicam os pares de expoentes (μ_{MC}, μ_{MD}) , que ajustam as estratégias de busca do modelo contínuo às estratégias de busca do modelo discreto. A curva em preto contínua, representa o ajuste dos pontos a fim de obter uma curva segundo a Eq. 3.30. É observado que à medida que a distância característica τ aumenta, os valores dos expoentes do modelo contínuo μ_{MC} , diminuem para se ajustarem ao MD.

Por exemplo, se tomarmos a forma funcional para a distância característica $\tau = 2500$, veremos que para o valor $\mu_{MC} = 1,11$ que consta na figura 3.10 teremos $\mu_{MD} \approx 1,50$ com um erro relativo de $\epsilon \approx 0,4\%$. Já para um valor de distância característica maior, por exemplo $\tau = 20000$, se considerarmos o valor $\mu_{MC} = 1,42$ na figura 3.10, obteremos o valor $\mu_{MD} \approx 2,50$ com um erro relativo de $\epsilon \approx 2,0\%$.

Construímos um espaço de parâmetros para obtermos o número de alvos no ambiente quando este, entra na estacionariedade. O espaço de parâmetros consiste em variar os dois parâmetros que determinam o quão rápido o sistema alcança o estado estacionário: a estratégia de busca μ e a distância característica τ . Desse modo, o espaço de parâmetros visa “mapear” quais pares de parâmetros levam ao mesmo número de alvos disponíveis no ambiente na configuração estacionária.

Um espaço de parâmetro é obtido por meio da formação de uma grade composta pelos parâmetros de controle do sistema, neste caso μ e τ , na qual para cada intersecção

τ	Forma funcional
2500	$\mu_{MD} = 0,352867 + 1,62227 \mu_{MC} + 0,141442 \ln (\mu_{MC} - 1,09968)$
5000	$\mu_{MD} = 0,448752 + 1,55928 \mu_{MC} + 0,146477 \ln (\mu_{MC} - 1,06947)$
10000	$\mu_{MD} = 0,533864 + 1,50318 \mu_{MC} + 0,136605 \ln (\mu_{MC} - 1,03977)$
20000	$\mu_{MD} = 0,718516 + 1,40875 \mu_{MC} + 0,178516 \ln (\mu_{MC} - 1,02857)$

Tabela 3.1 – Forma funcional do ajuste de curvas da figura 3.10 para as diferentes distâncias características τ , percorridas pelo forrageador. As funções ajustam os valores do MC aos do MD.

nesta grade, associamos para cada par (μ, τ) uma grandeza, que em nosso caso será $N(t)$, obtida logo após o tempo transiente.

Para obtermos o espaço de parâmetros do modelo analítico para o número de alvos encontrados pelo buscador e para o número de alvos disponíveis no ambiente, dividimos o intervalo de μ em quatro regiões: $1,0 \leq \mu \leq 1,5$; $1,5 \leq \mu \leq 2,0$; $2,0 \leq \mu \leq 2,5$; e $2,5 \leq \mu \leq 3,0$ e assumimos $\tau \in [2500, 20000]$, originando quatro grades 100×100 , e totalizando uma grade de 400×100 pontos equidistantes. Esta divisão foi necessária para que pudéssemos observar o comportamento das grandezas $N_a(t)$ e $N(t)$ com uma boa resolução.

Na figura 3.11, apresentamos o espaço de parâmetros do modelo analítico para número de alvos no ambiente. O espaço de parâmetros mostrado na figura 3.11 informa o número de alvos disponíveis no ambiente quando este alcança o regime estacionário. Para obtermos os valores do número de alvos presentes no ambiente no regime estacionário, obtivemos os valores de $N(t)$ quando o valor da sua derivada fosse da ordem de $\delta \sim 10^{-5}$.

Podemos ver na figura 3.11 que, para a estratégia de busca $\mu = 1,0$ e distância característica $\lambda = 20000$, o número de alvos disponíveis no ambiente, na configuração estacionária, é $N(t) = 3000$, que concorda com o valor encontrado na figura 3.2. Para o par $\mu = 1,0$ e $\tau = 2500$, o número de alvos no ambiente é $N(t) \approx 18000$, que é o valor no número de alvos no ambiente obtidos por meio da simulação computacional como mostraremos mais adiante.

Agora, se tomarmos a curva em amarelo na figura 3.11, veremos que há pares de parâmetros que levam à mesma configuração estacionária do número de alvos disponíveis no ambiente. Podemos ver que tanto o par $(\mu = 1,7; \lambda = 10000)$ quanto o par $(\mu = 1,5; \lambda = 5000)$ exibem o mesmo valor de número de alvos disponíveis na estacionariedade, que é $N(t) = 16000$.

Por outro lado, se tomarmos a estratégia de busca $\mu = 2,0$, considerada a estratégia ótima em ambientes com esparso número de alvos, podemos observar que variando a distância característica do caminhante, a quantidade de alvos disponíveis no ambiente,

no regime estacionário, estabiliza em valores diferentes. Para o par $(\mu = 2,0; \lambda = 2500)$ temos $N(t) = 128000$ alvos enquanto que para $(\mu = 2,0; \lambda = 5000)$, $N(t) = 64000$ e para $(\mu = 2,0; \lambda = 10000)$ temos $N(t) = 32000$.

Da mesma forma, ao fixarmos um valor para a distância característica, por exemplo $\lambda = 5000$, e variarmos μ de maneira contínua, poderemos ver na figura 3.12 que o ambiente alcança o regime estacionário com diferentes números alvos disponíveis. Note que para o par $(\mu = 1,01; \lambda = 2500)$ o número de alvos no ambiente é igual a $N(t) = 1,4 \times 10^6$, concordando com a figura 3.6. Comparamos os valores obtidos por meio do espaço de parâmetros do modelo analítico com os obtidos por meio das simulações computacionais, construindo, para isso, o espaço de parâmetros da simulação computacional.

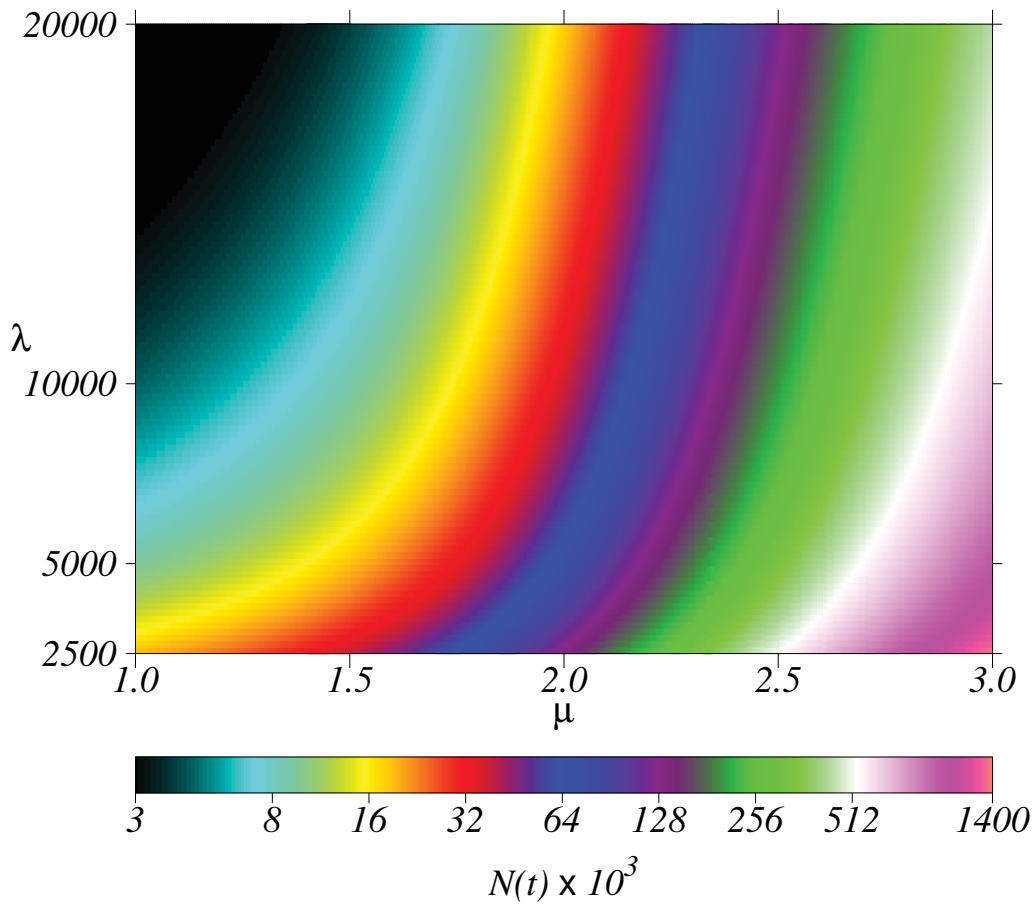


Figura 3.11 – Espaço de parâmetro para o número de alvos no ambiente no MC. A figura mostra $N(t)$ para os pares (μ, τ) após o ambiente alcançar o tempo estacionário, T_{est} . O espaço de parâmetros mostra de que forma evolui o número de alvos disponíveis no ambiente quando se varia de forma contínua os pares de parâmetros (μ, λ) . Na figura, para a estratégia de busca $\mu = 1,5$, diferentes distâncias características levam à diferentes configurações estacionárias para o número de alvos disponíveis. O mesmo ocorre quando fixamos a distância característica, como por exemplo, $\lambda = 2500$ e variamos o expoente que descreve a estratégia de busca.

Diferente do modelo analítico, em que os valores estacionários são obtidos por meio

das soluções das equações diferenciais calculadas com diferentes valores de parâmetros, nas simulações computacionais as flutuações estocásticas tornam-se um problema para se obter esses valores. Isso ocorre porque é difícil de distinguir se uma determinada quantidade, por exemplo, o número de alvos disponíveis, alcançou a configuração estacionária, para um dado par de parâmetros, ou se esse valor calculado não passa de uma flutuação.

Devido a estas flutuações estocásticas, para obtermos o número de alvos disponíveis no regime estacionário, procedemos da seguinte maneira: da mesma forma como variamos os parâmetros para o cálculo do espaço de parâmetros do modelo analítico, variamos os parâmetros $(\mu; \lambda)$, calculando para cada par de parâmetros, o número de alvos disponíveis no ambiente, como mostrado na figura 3.4-b. Em seguida, ao longo de cada curva, tomamos um número fixo de valores de $N(t)$ e calculamos o valor médio recorrendo a expressão

$$\frac{|\langle N_j(t) \rangle - \langle N_i(t) \rangle|}{2n} \leq \sigma, \quad (3.31)$$

na qual

$$\langle N_j(t) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{j=n}^M N_j(t), \quad (3.32)$$

$$\langle N_i(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N N_i(t).$$

Na Eq.3.32, N e M representam os intervalos nos quais os valores médios, $\langle N_j(t) \rangle$ e $\langle N_i(t) \rangle$ foram calculados. Para o caso aqui apresentado, $N = M = 10000$. Os índices j e i discriminam o j -ésimo e o i -ésimo valor de alvos disponíveis no ambiente dentro do intervalo considerado.

Desse modo, a Eq.3.31 representa uma diferença entre as médias aritméticas do número de alvos disponíveis no ambiente, calculadas ao longo de intervalos fixos. Ainda sobre a Eq.3.31, σ corresponde a precisão adotada e $2n = N + M$. Em suma, procedemos da seguinte maneira: à cada dez mil valores de alvos disponíveis no ambiente, tomamos a média aritmética e, então, calculamos a diferença absoluta até a diferença entre as médias alcançar a precisão desejada que, nesse caso, corresponde a $\sigma \sim 10^{-2}$.

Na figura 3.12 mostramos a comparação entre o espaço de parâmetro proveniente do modelo analítico e o obtido por meio da Eq.3.23. Devido ao alto custo computacional na construção do espaço de parâmetros da simulação computacional, realizamos o cálculo para as estratégias de busca próximas ao regime balístico e destacamos, da figura 3.11, o intervalo desejado para a comparação. Podemos observar que para a distância característica $\lambda = 2500$ e estratégias de busca próximas ao regime balístico, o modelo analítico descreve com boa concordância o número de alvos disponíveis no ambiente no regime estacionário.

Entretanto, a medida em que a distância característica cresce, a comparação entre os valores estacionários muda. Nossa hipótese para isso pode residir no fato de que há

uma perda de informação quando se utiliza a aproximação de campo médio para o cálculo do $\langle \ell \rangle$. Dizemos que é uma hipótese, pois, se multiplicarmos os valores estacionários do espaço de parâmetros analítico por um fator igual a $\exp(1,0 - \mu)$, poderemos ver na figura 3.13, que este fator corrige os valores, aproximando-os dos resultados obtidos via simulação computacional.

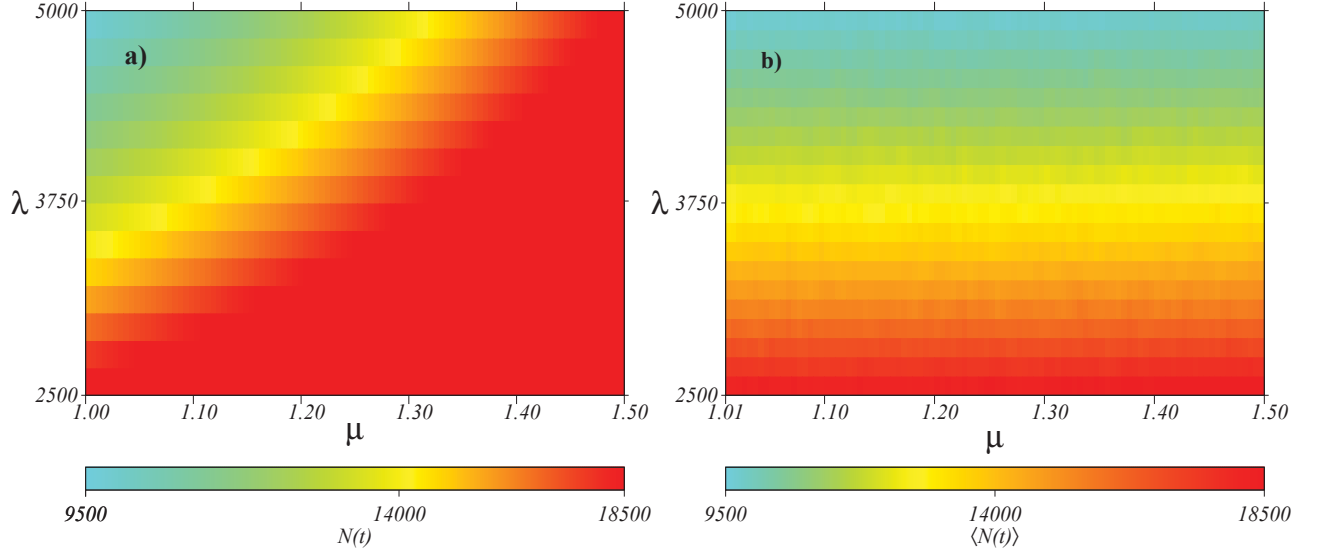


Figura 3.12 – Espaço de parâmetros para o número total de alvos disponíveis no ambiente. No item **a)** o espaço de parâmetros analítico: caixa destacada da figura 3.11. In **b)**, espaço de parâmetros da simulação. cada cor representa o valor médio de alvos disponíveis obtidos por meio da Eq. (3.23).

Na figura 3.12 mostramos a comparação entre o espaço de parâmetro proveniente do modelo analítico e o obtido por meio da Eq.3.23. Devido ao alto custo computacional na construção do espaço de parâmetros da simulação computacional, realizamos o cálculo para as estratégias de busca próximas ao regime balístico e destacamos, da figura 3.11, o intervalo desejado para a comparação. Podemos observar que para a distância característica $\lambda = 2500$ e estratégias de busca próximas ao regime balístico, o modelo analítico descreve com boa concordância o número de alvos disponíveis no ambiente no regime estacionário.

Entretanto, a medida em que a distância característica cresce, a comparação entre os valores estacionários muda. Nossa hipótese para isso pode residir no fato de que há uma perda de informação quando se utiliza a aproximação de campo médio para o cálculo do $\langle \ell \rangle$. Dizemos que é uma hipótese, pois, se multiplicarmos os valores estacionários do espaço de parâmetros analítico por um fator igual a $\exp(1,0 - \mu)$, poderemos ver na figura 3.13, que este fator corrige os valores, aproximando-os dos resultados obtidos via simulação computacional.

Uma questão importante que surge aqui, e que trataremos de esclarecer, é o fato de o número de alvos disponíveis no ambiente, no regime estacionário, não depender

da estratégia de busca nas simulações computacionais. Depende somente da distância característica λ , como podemos observar na figura 3.13-**b**. Para elucidar esse fato, analisamos o comportamento do número de alvos disponíveis no ambiente para três diferentes estratégias de busca, comparadas entre três diferentes distâncias características λ .

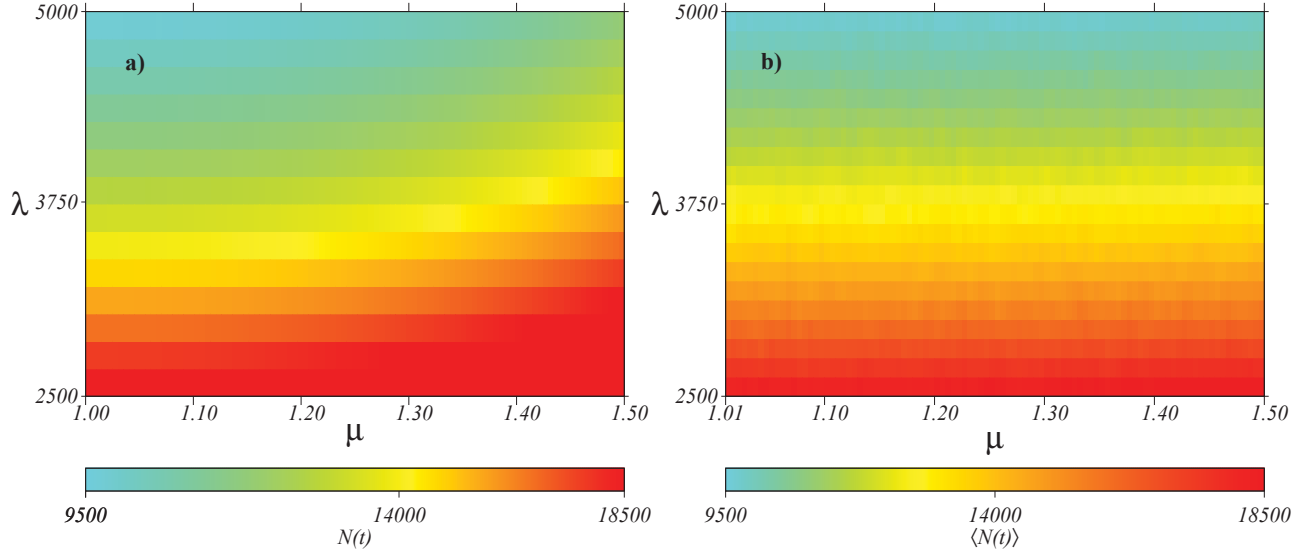


Figura 3.13 – Espaço de parâmetros para o número total de alvos disponíveis no ambiente. O item **a)** mostra o espaço de parâmetros analítico corrigido pelo fator multiplicativo $\exp(1.0 - \mu)$. No **b)**, o espaço de parâmetros obtido da simulações. O fator exponencial corrige o espaço de parâmetros analítico aproximando-o dos valores obtidos nas simulações computacionais.

Mostramos, na figura 3.14 esta análise. É possível observar que para uma determinada distância característica λ , as curvas que representam o crescimento no número de alvos disponíveis no ambiente obtidas com diferentes estratégias de busca se sobrepõem em uma mesma curva.

Esse fato sugere que é o tamanho do ambiente de busca que rege a distribuição espacial de alvos durante o tempo transiente, e não a estratégia de busca como seria mais intuitivo pensar. Na direção da estacionariedade os alvos disponíveis no ambiente tanto quanto os alvos encontrados pelo caminhante não variam com a estratégia de busca. Podemos constatar isso observado a figura 3.15, que mostra o número de alvos disponíveis em diferentes instantes de tempo, até o ambiente alcançar uma configuração estacionária para o número de alvos.

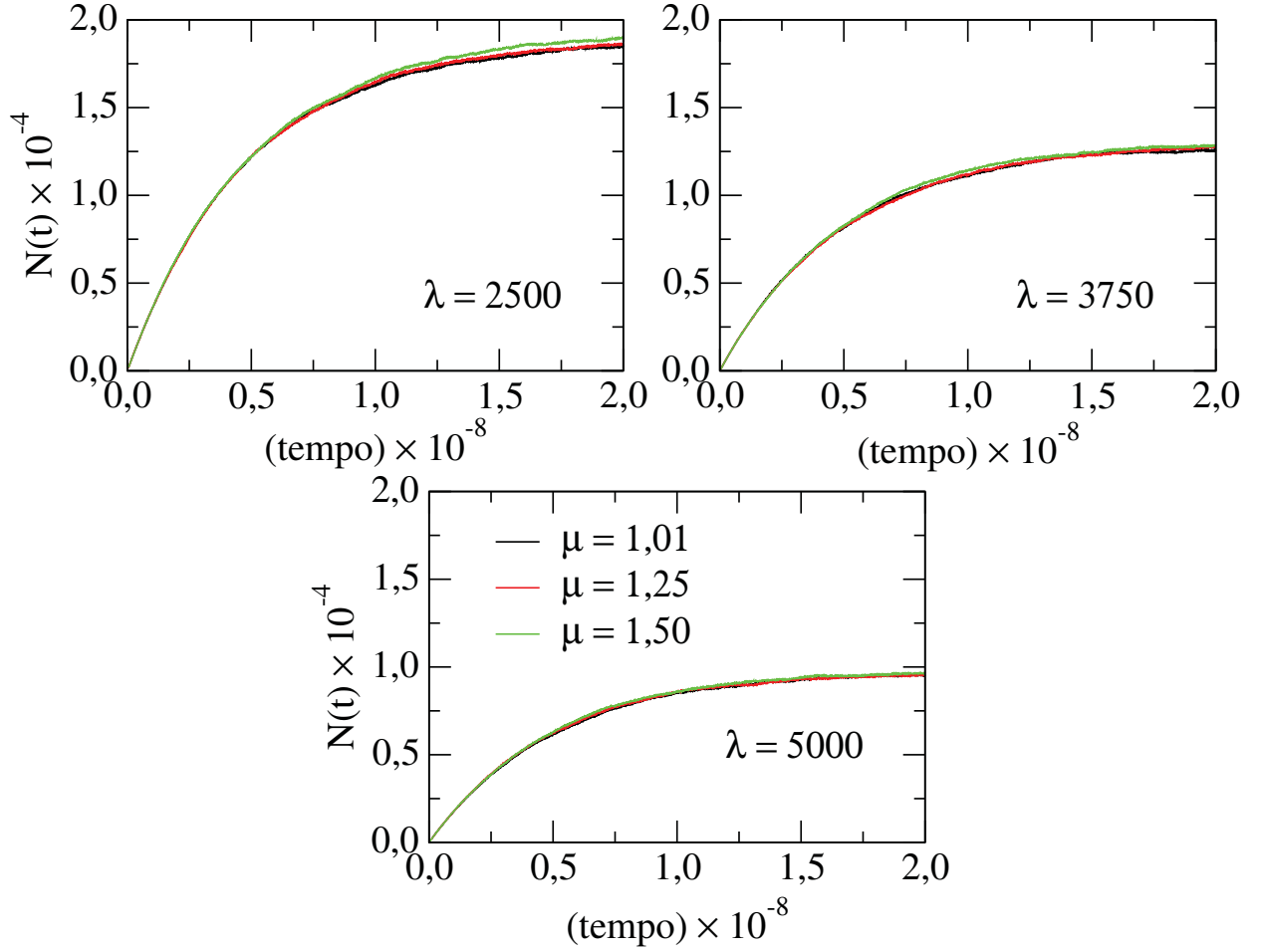


Figura 3.14 – A evolução temporal para o número de alvos disponíveis no ambiente de acordo com a figura 3.13-(b). Para três diferentes estratégias de busca, o número de alvos disponíveis se ajustam, muito bem, sobre uma mesma curva para cada distância característica, mostrando que a estratégia de busca não influencia a quantidade de alvos no ambiente durante o transiente, para estratégias próximas do regime balístico.

Ao analisarmos o número de alvos na figura 3.15, observa-se que para um mesmo instante de tempo, a quantidade de alvos disponíveis no ambiente não varia de acordo com o expoente μ , mas sim, de acordo com a distância característica, τ .

É o que podemos ver, quando olhamos para o número de alvos no ambiente em dois instantes de tempo diferentes. O primeiro em $t = 0,200 \times 10^8$, isto é, no início da busca e portanto no transiente. E o segundo instante de tempo em $t = 2,00 \times 10^8$, instante em que o número de alvos no ambiente alcançou o limite estacionário. Pode-se observar que a quantidade de alvos no ambiente para as três diferentes estratégias de busca, nesses instantes de tempo, é qualitativamente a mesma.

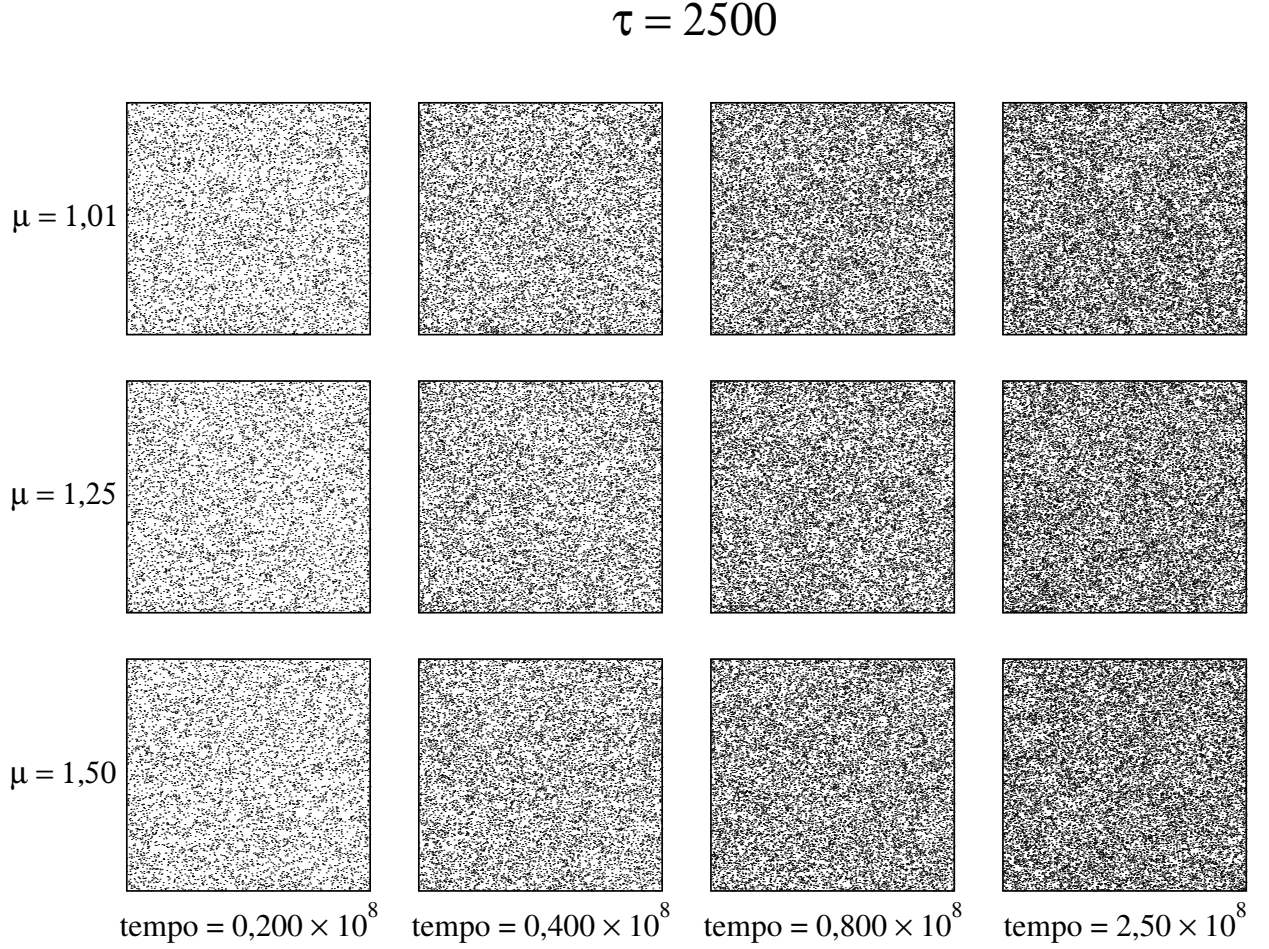


Figura 3.15 – Instantâneos do número de alvos disponíveis no ambiente obtidos por meio das simulações computacionais para quatro diferentes instantes de tempo durante o transiente e distância característica $\tau = 2500$, obtidas da figura 4.6. Os pontos pretos representam as posições dos alvos disponíveis. No início da busca, são criados mais alvos do que o caminhante consegue encontrar. Porém, as três diferentes estratégias de busca mostram que o número de alvos no ambiente é qualitativamente igual. Pode-se observar, que do transiente à configuração estacionária, o número de alvos para os três diferentes valores do expoente μ , possuem a mesma aproximadamente a mesma configuração para o número de alvos disponíveis.

Para os mesmos instantes de tempo considerados na figura 3.15, salvamos as coordenadas dos alvos detectados pelo caminhante. O resultado é mostrado na figura 3.16. No início da busca a densidade de alvos no ambiente aumenta porque o número de alvos criados é maior do que o número de alvos que o caminhante consegue encontrar.

À medida que o tempo passa, o número de alvo detectados aumenta porque a densidade de alvos no ambiente é maior fazendo o sistema alcançar a configuração estacionária. Vemos na figura 3.16 que o número de alvos detectados, assim como o número de alvos disponíveis no ambiente, também não depende da estratégia de busca adotada pelo caminhante.

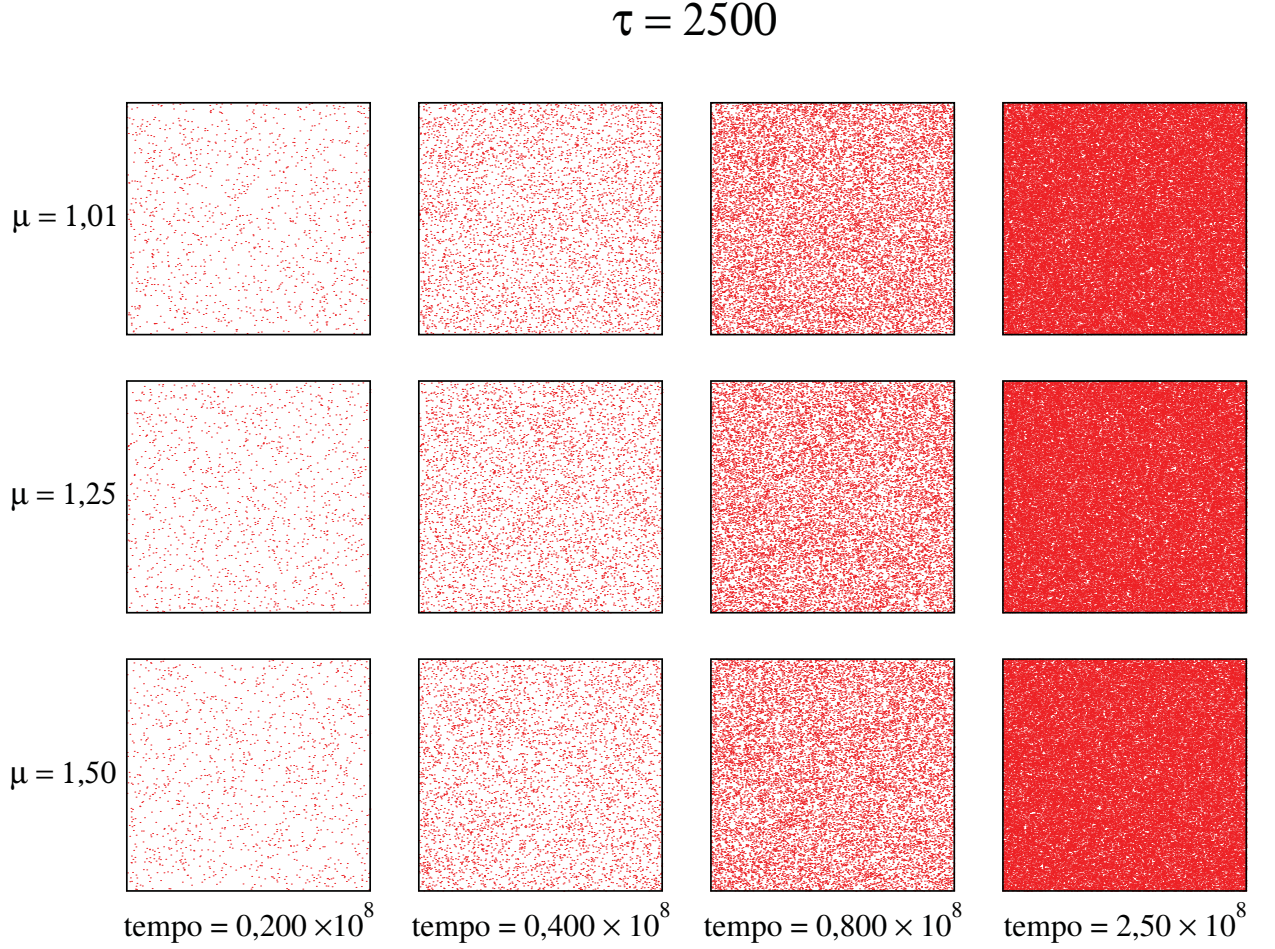


Figura 3.16 – Instantâneos do número de alvos detectados pelo caminhante durante o transiente. Os pontos em vermelho representam as coordenadas dos alvos que foram encontrados no ambiente durante o tempo transiente. Para um dado instante de tempo, o número de alvos encontrados independe da estratégia de busca adotada pelo caminhante.

A independência da estratégia de busca na quantidade de alvos disponíveis no ambiente e de alvos detectados pelo caminhante pode significar que, quanto mais próximo do início do tempo transiente o sistema se encontra, maior é a influência do tamanho do ambiente no processo de busca. As trajetórias executadas pelo caminhante durante o tempo transiente confirmam nossa hipótese de que o tamanho do ambiente exerce papel preponderante para este alcançar o regime estacionário.

Além disso, é preciso ressaltar que nas simulações computacionais são aplicadas as condições periódicas de contorno. Essas condições fazem com que, computacionalmente, o ambiente se torne um *torus*. Assim, toda vez que o caminhante chega aos limites do ambiente de busca ele aparecerá na outra extremidade com a mesma direção adotada no início do passo. Na figura 3.17, mostramos as trajetórias típicas executadas pelo caminhante no momento em que diferentes número de alvos se encontram disponíveis no ambiente.

Os pontos em verde, na figura 3.17, representam os alvos encontrados pelo ca-

minhante. Os pontos em vermelho, representam os subsequentes alvos encontrados. Por exemplo, na figura 3.17, $AE = 1$, representa a trajetória para encontrar o segundo alvo, assim como $AE = 10000$, descreve a trajetória para encontrar o alvo de número dez mil e um.

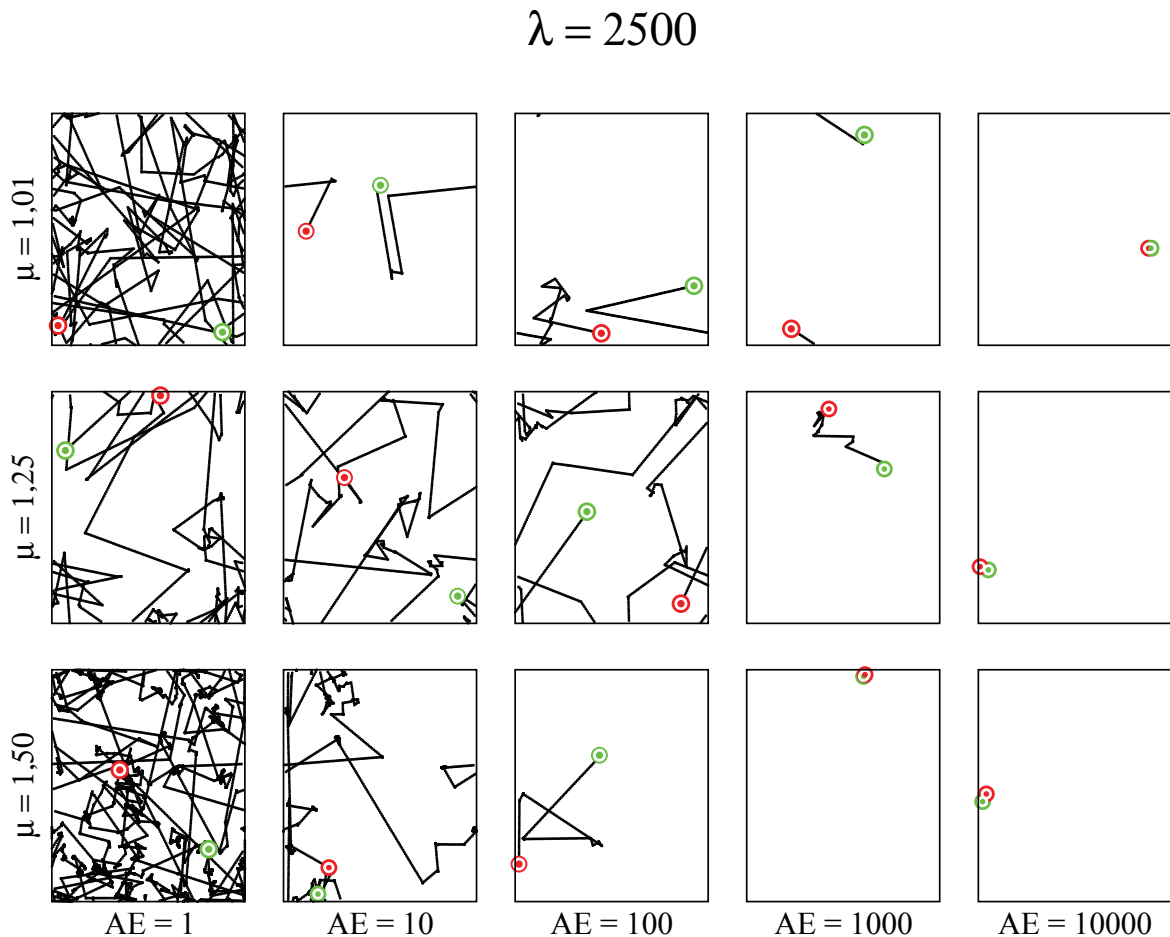


Figura 3.17 – Trajetórias típicas executadas pelo caminhante que adota uma distância característica $\lambda = 2500$, quando o ambiente tem diferentes números de alvos disponíveis. O ponto em verde representa um alvo encontrado (AE) pelo caminhante. O ponto em vermelho representa o próximo alvo que é encontrado e a linha em preto constitui a trajetória formada entre o encontro dos dois alvos sucessivos. À medida em que a estratégia de busca se aproxima do valor $\mu = 1,50$, a frequência dos passos de tamanhos grandes se torna menor fazendo o caminhante dar mais passos para encontrar um alvo. A influência da condição periódica de contorno pode ser vista quando o caminhante se aproxima das extremidades do ambiente, como por exemplo, para $\mu = 1,01$ e $AE = 1000$. Após o caminhante encontrar cerca de dez mil alvos, a distância que o caminhante percorre se torna cada vez menor, se aproximando do valor do livre caminho médio.

Para três diferentes estratégias de busca, é possível observar semelhanças nos padrões das trajetórias para cada número de alvos encontrados. Conforme havíamos dito anteriormente, no início da busca, o tamanho dos passos são maiores devido a baixa densidade de alvos, que faz com o truncamento dos passos seja menos frequente. É o que podemos

perceber, comparando as trajetórias entre as estratégias de busca, $\mu = 1,01$ e $\mu = 1,50$.

Embora a frequência de passos de tamanhos grandes seja maior para a estratégia de busca $\mu = 1,01$ do que para a estratégia $\mu = 1,50$, as trajetórias se assemelham. Isso se dá devido a baixa frequência no truncamento dos passos. Devido a baixa frequência no truncamento dos passos pode-se observar a formação de aglomerados de passos pequenos, para ambas as estratégias.

Podemos constatar, também, a influência da condição periódica de contorno no encontro dos alvos. Essa condição faz com que, probabilisticamente, o caminhante ande menos para encontrar um alvo. Perto de uma das extremidades do ambiente, o caminhante, ao tomar uma direção aleatória, pode aparecer na outra extremidade do ambiente e encontrar um alvo naquela região.

Como no começo da busca, a frequência de passos que são truncados é menor, a probabilidade do caminhante chegar as extremidades do ambiente e ultrapassá-lo é maior. Consequentemente, a condição periódica de contorno contribui para que o ambiente prepondere sobre as estratégias de busca durante o transiente.

Como pode ser visto na figura 3.17 no quadro que mostra o número de alvos encontrados, $AE = 1000$, e a estratégia $\mu = 1,01$. À medida que o caminhante aumenta o número de alvos encontrados e o ambiente é dirigido à configuração estacionária no número de alvos disponíveis, o tamanho dos passos se aproxima do livre caminho médio, como podemos observar na situação em que $AE = 10000$.

O número de alvos disponíveis no ambiente seria dependente da estratégia de busca somente para os casos em que pudéssemos desprezar os efeitos da condição periódica de contorno, isto é, no caso em que, $A \rightarrow \infty$. Nesse caso, associado a um intervalo de tempo suficientemente longo ($t \rightarrow \infty$), isto é, após o transiente, a influência da condição periódica de contorno se tornaria menor e a estratégia de busca passaria a determinar o quão rápido o ambiente alcança a estacionariedade.

Na figura 3.18, mostramos a comparação do número de alvos disponíveis no ambiente para dois diferentes tamanhos de ambiente. A escala logarítmica para a variável tempo, mostra para qual estratégia de busca o ambiente alcança o regime estacionário primeiro. Para o ambiente com lado de tamanho $L = 10^4$, não há uma diferença pronunciada entre as estratégias de busca e as três se sobrepõem na mesma curva.

Conforme a área do ambiente aumenta e a busca evolui no tempo, a estratégia de busca $\mu = 1,50$ faz com que o número de alvos disponíveis no ambiente alcance o regime estacionário mais lentamente. Podemos observar que para ambientes com uma área maior, a distância característica ainda determina o valor estacionário para o número de alvos no ambiente.

Com isso mostramos que para o ambiente considerado nas simulações computacionais, o número de alvos disponíveis quando aquele alcança a estacionariedade não dependerá

das estratégias de busca se estas estiverem próximas do regime balístico. Dependerá exclusivamente do tamanho do ambiente e da distância característica adotada pelo caminhante.

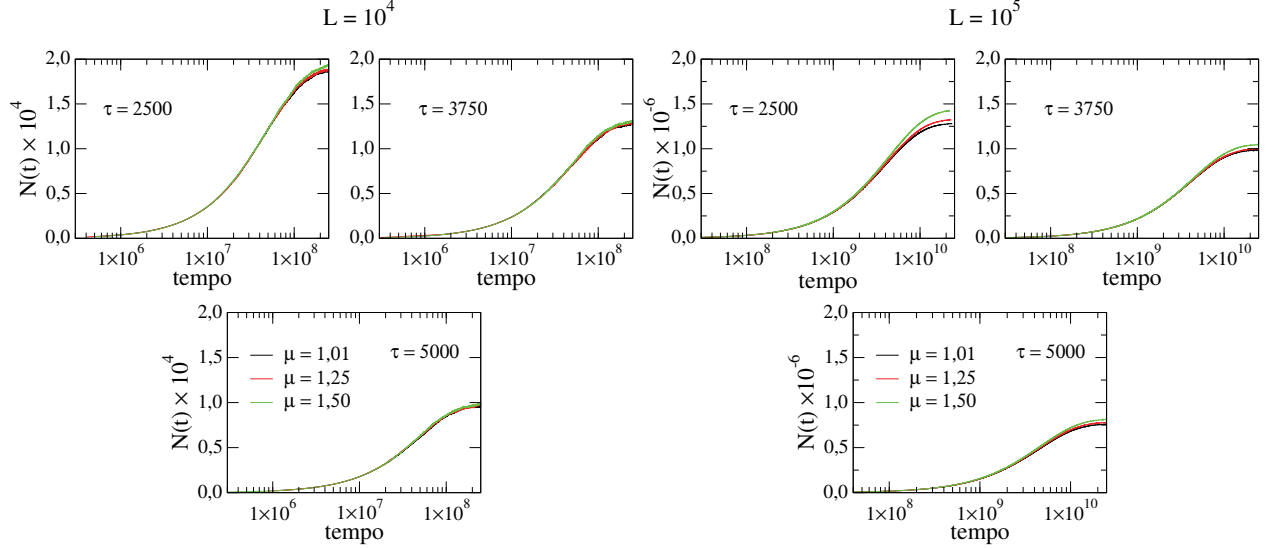


Figura 3.18 – Comparação das estratégias de busca para dois diferentes tamanhos de ambiente de busca. À esquerda, o número de alvos disponíveis não muda para estratégias de busca próximas ao regime balístico e exibem o mesmo comportamento para a mesma distância característica. Na medida em que o tamanho do ambiente aumenta (à direita), não somente o número de alvos disponíveis alcança a configuração estacionária em valores maiores como também as estratégias de busca exibem sensível diferença após longos intervalos de tempo.

Na próxima seção apresentaremos a análise da eficiência de busca, para esse sistema, durante o transiente. Deduzimos uma equação diferencial para a eficiência de busca que, uma vez resolvida, fornece a evolução temporal da eficiência para todas as estratégias de busca. Mostraremos que para $\mu = 1,0$, a equação diferencial possui uma solução exata.

Vale ressaltar que, na estacionariedade, a distância que o forrageador percorre durante o encontro de dois alvos sucessivos é igual ao livre caminho médio para o encontro de dois alvos sucessivos. Uma característica importante da dinâmica do ambiente é que no regime estacionário todas as estratégias de busca deverão convergir para o mesmo valor de livre caminho médio entre dois alvos, coincidindo com τ .

Assim, no limite estacionário, todas as estratégias de busca terão a mesma eficiência η , aproximadamente $1/\tau$. Isso significa que na estacionariedade a eficiência não depende do expoente μ , porque o número de alvos no ambiente é tal que, para cada distância característica τ percorrida, um alvo é encontrado.

3.4 A Eficiência de Busca

A eficiência de busca está relacionada, basicamente, ao expoente μ que descreve a melhor estratégia de busca, isto é, aquela estratégia que leva o caminhante a encontrar o maior número de alvos percorrendo a menor distância possível. Desse modo, o estudo da eficiência consiste em encontrar a estratégia descrita pelo expoente μ_{opt} , no intervalo $1 < \mu \leq 3,0$ que melhor otimiza a taxa de encontro dos alvos.

Desse modo, a eficiência pode depender tanto de fatores internos do caminhante como, por exemplo, o custo energético para empreender a busca por alvos quanto depender de fatores externos, isto é, fatores ligados ao ambiente de busca como o seu tamanho e a sua quantidade de alvos. Além disso, a estratégia que otimiza a busca depende (fortemente), também, do tipo de forrageamento executado pelo caminhante.

Resultados na literatura [40,91] mostram que em ambientes com esparsa quantidade de alvos, quando o forrageamento é do tipo não destrutivo, isto é, o caminhante pode visitar os alvos inúmeras vezes durante a busca, o expoente que otimiza a busca é, $\mu_{opt} = 2,0$. Por outro lado, se o forrageamento é do tipo destrutivo e o ambiente ainda guarda esparsa quantidade de alvos, não há vantagem para o caminhante voltar ao alvo previamente visitado e, desse modo, o expoente que descreve a estratégia que otimiza a busca é aquele em que $\mu_{opt} \rightarrow 1^+$, correspondendo a um movimento retilíneo entre os alvos. Quando os recursos são abundantes e o forrageamento é do tipo não destrutivo, a estratégia de busca que melhor otimiza o encontro de alvos é a estratégia Browniana [4].

Modelos mais elaborados levam em consideração a regeneração dos alvos no ambiente de busca, após um tempo de demora, τ , na regeneração dos alvos contidos no ambiente [92]. Isso possibilita observar uma transição entre os dois tipos de forrageamento e, assim, entender melhor a influência do tipo de forrageamento nas estratégias que otimizam a busca. Sabe-se que os recursos levam um certo tempo para se tornarem disponíveis na natureza e, desse modo, há uma adaptação do forrageador que leva à otimização da sua busca para torná-la mais eficiente. Foi mostrado [92] que valores intermediários entre o expoente ótimo $1 < \mu_{opt} \leq 2,0$ podem emergir quando o tipo de forrageamento varia de um regime destrutivo ($\tau \rightarrow \infty$) para um não destrutivo ($\tau \rightarrow 0$).

Outra característica natural que se apresenta é o número de passos dados pelo forrageador durante uma busca. É intuitivo que o caminhante dê um número finito de passos no ambiente de busca, à procura de alvos. Nesse sentido, há estudos que mostram uma significativa influência da interação entre a condição de parada do forrageamento e as configurações do ambiente de busca, tais como, o tamanho do ambiente e o número de alvos [93].

Surge que, quando a condição de parada desempenha um papel na busca por alvos, um amplo intervalo de μ_{opt} surge, indo desde o regime balístico ($\mu_{opt} \rightarrow 1$), passando pelos voos de Lévy ($1 < \mu_{opt} < 3,0$) até o movimento Browniano ($\mu_{opt} = 3,0$). Esse amplo intervalo

de estratégias ótimas parece surgir como uma resposta de adaptação do caminhante aos vínculos impostos pelo ambiente da busca, tais como, o tamanho do ambiente, número de alvos e o retorno estocástico que simula o comportamento de retorno ao “lar” do forrageador.

Estudos considerando a topografia do ambiente de busca mostram que a estratégia ótima se altera significativamente, indo de um regime menos balístico para uma estratégia mais Browniana, quando adicionado barreiras e obstáculos ao ambiente [94]. Em ambientes de busca com dimensão fractal, para o caso em que a busca é não destrutiva, surge um comportamento ótimo universal para a eficiência de busca no regime de baixas densidades de alvos, independente das propriedades de escala da distribuição de alvos. No entanto, no mesmo regime de baixas densidades, mas agora considerando uma busca destrutiva, o caráter ótimo universal para a estratégia não aparece, demonstrando que a estratégia que otimiza a busca depende do grau de agregação de alvos no ambiente [95].

De um modo geral, a eficiência de busca é definida como a razão entre o número de alvos encontrados e a distância total percorrida pelo forrageador [82], [83]. Uma vez que, em nosso modelo, o caminhante destrói o alvo no mesmo instante em que ele o encontra, isto é, o forrageador não gasta tempo para aniquilar o alvo, e desde que a velocidade do forrageador é considerada constante e unitária, podemos escrever

$$\eta(t) = \frac{N_a(t)}{vt} = \frac{N_a(t)}{t}. \quad (3.33)$$

Um outro modo de classificar as estratégias de busca é por meio de figuras de mérito [4].

Considerando o regime transiente, é esperado que η convirja assintoticamente à um valor constante e que possivelmente dependa de algum parâmetro do sistema. Desse modo uma figura de mérito é útil para inferirmos o comportamento da eficiência após o tempo transiente. Para construirmos a figura de mérito do nosso modelo consideramos que a eficiência, em ambos os modelos, discreto e contínuo, se comporta de acordo com equação

$$\eta(t) \sim \frac{N_a(T_{est}) + (t - T_{est}/\tau)}{L(T_{est}) + v(t - T_{est})}, \quad (3.34)$$

quando $t \geq T_{est}$, isto é, após o transiente η aumenta linearmente. O numerador na Eq. 3.34, é a condição estacionária para o número de alvos encontrados, dado pela Eq. 3.11. Desse modo, $\eta = 1/(v\tau)$, quando $t \rightarrow \infty$. Assim, a quantidade que mais prontamente leva ao comportamento assintótico do valor de η é

$$\eta(t) = \frac{dN_a(t)}{dL} = \frac{1}{v} \frac{dN_a(t)}{dt}, \quad (3.35)$$

ou, considerando $v = 1,0$,

$$\eta(t) = \frac{dN_a}{dt}. \quad (3.36)$$

A Eq. 3.36 nos informa que a figura de mérito da eficiência da busca para várias estratégias de busca, no modelo analítico, é igual a taxa de encontros dos alvos no ambiente de busca. Relacionando com a Eq. 3.17, temos

$$\eta(t) = \frac{(2 - \mu)v}{r_v \left[\left(\frac{A}{2r_v^2[N_c(t) - N_a(t)]} \right)^{2-\mu} - (\mu - 1) \right] \left(\frac{A}{2r_v^2[N_c(t) - N_a(t)]} \right)^{\mu-1}}. \quad (3.37)$$

Considerando que $\lambda(t) = A/2r_v [1 + t/\tau - N_a(t)]$, segue

$$\eta(t) = \frac{(2 - \mu)v}{r_v \left[\left(\frac{\lambda(t)}{r_v} \right)^{2-\mu} - (\mu - 1) \right] \left(\frac{\lambda(t)}{r_v} \right)^{\mu-1}}. \quad (3.38)$$

Uma vez obtida a forma funcional para $N_a(t)$, por meio da solução da Eq. 3.17, podemos obter a forma funcional da eficiência para cada uma das estratégias de busca. Podemos constatar que, para a estratégia de busca balística, conseguimos obter a solução na sua forma exata. Substituindo $\mu = 1,0$ na Eq. 3.37, e substituindo a solução exata para $N_a(t)$, dada pela Eq. 3.27, obtemos a equação

$$\eta(t) = \frac{1}{\tau} - \left(\frac{1}{\tau} - \frac{2r_v v}{A} \right) e^{-\frac{2r_v v}{A} t}. \quad (3.39)$$

Por meio da figura de mérito, observamos que a dinâmica da eficiência de busca durante o transiente, é caracterizada pelo termo exponencial. Na estacionariedade, após o tempo transiente ($t \rightarrow \infty$), o termo exponencial se anula e o lado direito da Eq. 3.39, resulta em $\eta(t \geq T_{est}) = 1/\tau$.

A figura 3.19 mostra a eficiência de busca, calculada por meio da Eq. 3.33, para a estratégia balística e diferentes distâncias características no modelo contínuo, comparada com a eficiência no modelo discreto. Independente da distância característica, a eficiência de busca cresce rápido no início da busca, para logo após o transiente, assumir um valor constante. A Eq.3.39, descreve o comportamento inversamente proporcional entre a eficiência e a distância característica, observada no modelo discreto, de acordo com o item (b) da figura 3.19.

A distância característica τ faz com que a eficiência alcance a estacionariedade em um valor menor. Isso é consequência da densidade de alvos no ambiente no início da busca. Foi mostrado anteriormente (vide figura 3.2), que valores maiores da distância característica fazem com que o ambiente alcance o limite estacionário mais rápido, consequentemente, a taxa de encontro de alvos é menor. O contrário ocorre nos casos em que a distância característica é menor. O ambiente alcança a configuração estacionária rapidamente, porém, a taxa de encontro de alvos é maior.

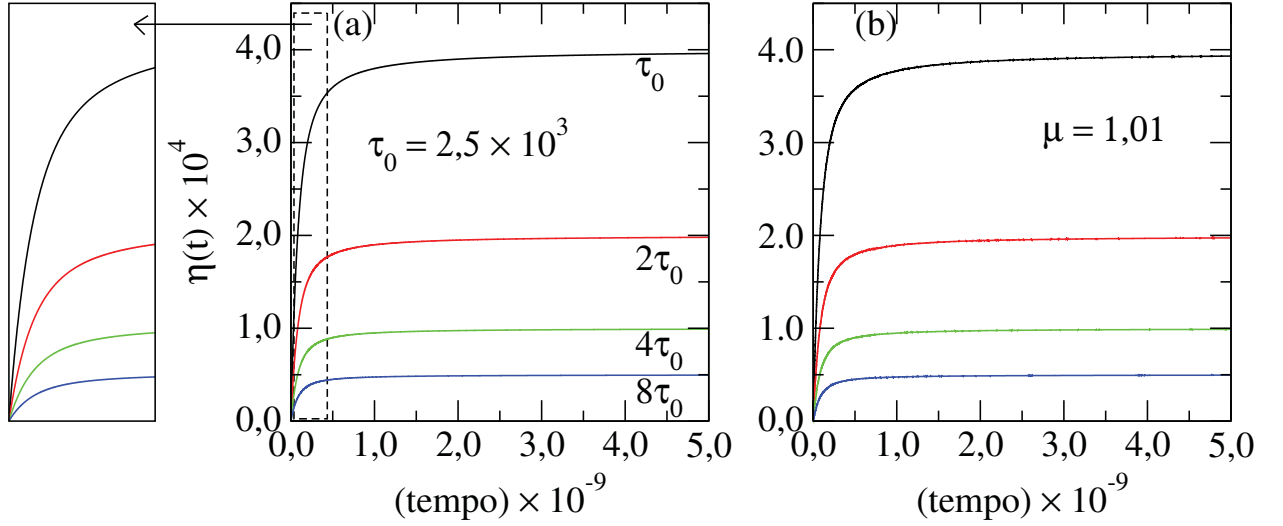


Figura 3.19 – Evolução temporal da eficiência de busca para a estratégia de busca balística e diferentes distâncias características. A eficiência alcança o limite estacionário mais rapidamente para valores maiores de τ e na estacionariedade, $\eta(\tau) = 1/\tau$. O modelo contínuo exibe uma boa concordância com o modelo discreto, mostrado no item (b). A caixa destacada à direita, no item (a), mostra o comportamento da eficiência durante o transiente, para o modelo contínuo.

Do fato da Eq. 3.33 não possuir solução exata para as estratégias de busca diferentes de $\mu = 1,0$, segue que a Eq. 3.38 também não possui solução exata para as demais estratégias de busca tratadas até então. Para obtermos a solução da eficiência de busca para as demais estratégias de busca, resolvemos numericamente a Eq. 3.38. O resultado é mostrado na figura 3.20.

Podemos constatar na figura 3.20 que a estratégia de busca mais eficiente, isto é, a estratégia que faz com que a taxa de encontro de alvos alcance a condição estacionária mais rapidamente, é $\mu = 1,0$. Podemos observar, também, que no regime estacionário todos os valores da estratégia de busca convergem para o mesmo valor de eficiência, isto é, $1/\tau$, embora para valores de estratégias de busca tendendo à estratégia Browniana, o tempo para alcançar o regime estacionário é maior. Comparamos os resultados da eficiência de busca, obtidos por meio da solução da Eq. 3.38, com os resultados obtidos por meio da simulação computacional. Mostramos a comparação na figura 3.21.

É possível perceber, por meio da figura 3.21, que a estratégia de busca que otimiza a eficiência, no modelo discreto, é aquela descrita pelo expoente $\mu = 1,01$. Estratégias de busca próximas do regime Browniano são menos eficientes do que as próximas do regime balístico, e convergem mais lentamente ao valor assintótico, conforme mostrado no item (f) da figura 3.21.

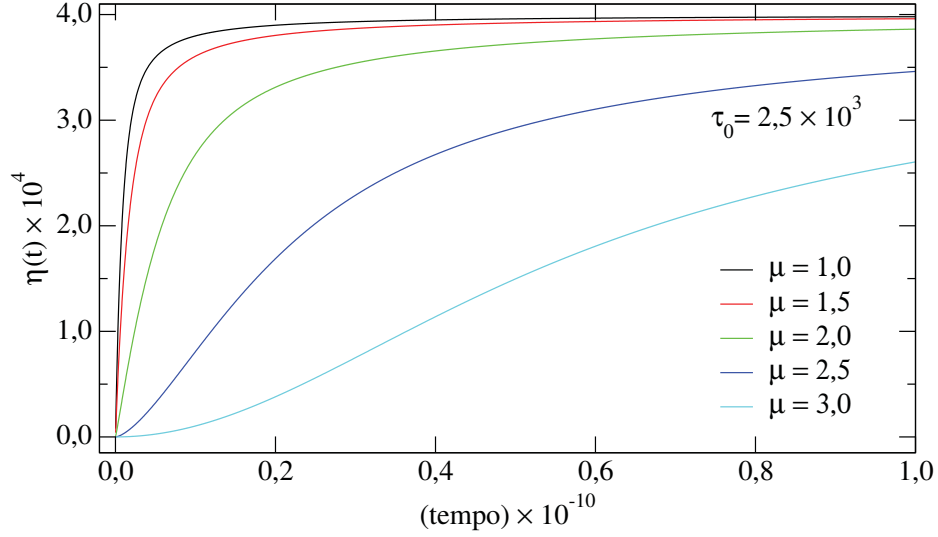


Figura 3.20 – Eficiência de busca em função do tempo para diferentes estratégias de busca e distância característica fixa τ , no modelo contínuo. A estratégia de busca que otimiza o encontro dos alvos é $\mu = 1,0$. As demais estratégias mostram que a eficiência de busca alcança o limite estacionário mais lentamente. No limite estacionário $\eta(t \geq T_{est}) = 1/\tau$, independente da estratégia de busca.

A caixa destacada no item (f), mostra a lenta convergência de η para a estratégia $\mu = 1,01$, quando se aproxima do valor assintótico. Nos itens de (a)–(e), as linhas pontilhadas descrevem o comportamento da derivada temporal do número de alvos encontrados, obtidas por meio da Eq. 3.36. A figura de mérito evidencia o comportamento assintótico de η , além da característica exponencial durante o transiente.

As linhas contínuas descrevem a eficiência obtida por meio das simulações computacionais enquanto que as linhas tracejadas descrevem o comportamento da eficiência obtidas do modelo contínuo. $\eta(MD)$ e $\eta(MC)$ exibem uma ótima concordância para estratégias de busca próximas do regime balístico. A influência da aproximação de campo médio pode ser percebida à medida que a estratégia de busca se aproxima do regime Browniano.

Isso ocorre porque, conforme mencionamos anteriormente, a aproximação de campo médio desconsidera eventuais flutuações espaciais na distância típica entre os alvos. No modelo discreto, ocorrem heterogeneidades na distribuição espacial dos alvos devido à aleatoriedade das posições dos alvos criados. Essas flutuações ocorrem particularmente no regime de baixas densidades.

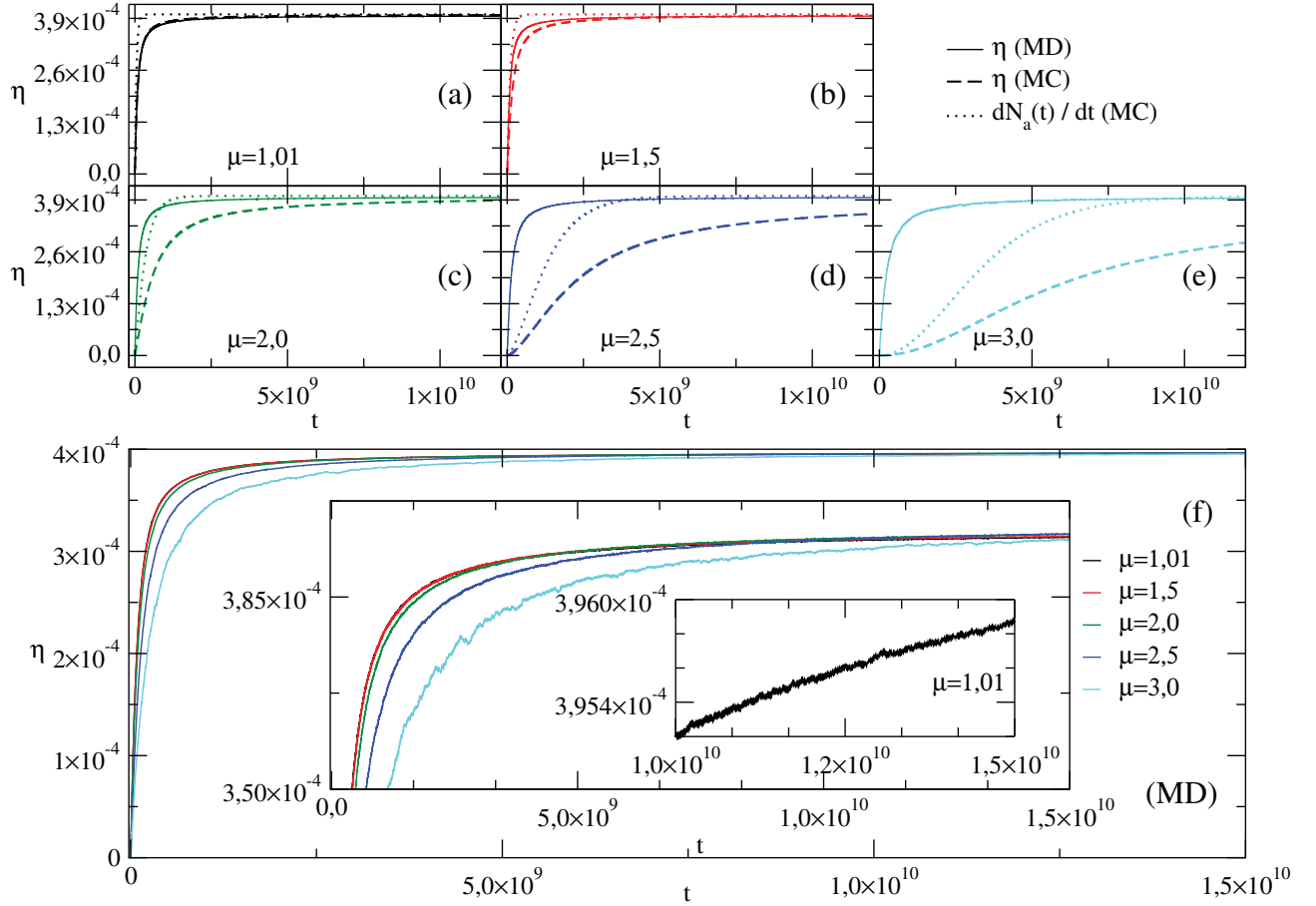


Figura 3.21 – Evolução temporal da eficiência de busca, no modelo discreto, para diferentes expoentes μ e distância característica fixa, $\tau = 2500$. Independente da estratégia de busca adotada, a eficiência cresce rápido e, então, a taxa se torna aproximadamente constante. A caixa destacada no interior da figura (item (f)), informa que η varia lentamente para $\mu = 1,01$, próximo do regime assintótico. As caixas destacadas no topo da figura comparam as eficiências obtidas via simulação computacional (linhas contínuas) e os resultados obtidos por meio do modelo analítico (linhas tracejadas).

Dessa forma, estratégias de busca próximas do regime balístico, como por exemplo $\mu = 1,01$, tornam-se mais eficazes para a exploração do ambiente diminuindo, desse modo, a heterogeneidade. Por outro lado, a aproximação de campo médio, no modelo contínuo, considera que os alvos, depois de criados, passam por uma rápida homogenização. Razão pela qual a influência da aproximação de campo médio é mais acentuada para estratégias de busca tendendo ao regime Browniano.

3.5 Conclusões e Perspectivas Futuras

Apresentamos, neste capítulo, uma formulação analítica para a caracterização da dinâmica durante o transiente, assumindo um processo de busca aleatória descrito por estratégias de Lévy. Por meio de dois processos que regulam a dinâmica do número de alvos disponíveis no ambiente, e de uma métrica que descreve a variação temporal da distância

típica média entre os alvos, obtivemos um conjunto de equações diferenciais contínuas que, uma vez resolvidas, descrevem o comportamento das grandezas que caracterizam o sistema durante o transiente, tais como $N(t)$, $N_a(t)$ e $\eta(t)$.

O ambiente de busca tem tamanho finito e é considerado dinâmico, em que alvos são criados a uma certa taxa $1/\tau$ e aniquilados na medida em que são encontrados por um caminhante que executa uma busca aleatória de acordo com diferentes estratégias de Lévy. A distância característica percorrida pelo caminhante τ e a estratégia de busca adotada μ , caracterizam a interação entre o processo de busca e a densidade de alvos. O expoente μ determina o quão rápido o ambiente de busca alcança o regime estacionário para o número de alvos no ambiente e a distância característica τ , descreve o valor no limite estacionário.

No modelo discreto, a condição para o regime estacionário ocorre quando há um ajuste entre a distância característica e o livre caminho médio entre dois alvos sucessivos, percorrido pelo caminhante. As simulações computacionais mostraram que a distribuição estacionária de alvos é alcançada primeiro para estratégias de busca com maior difusividade, isto é, $\mu \rightarrow 1$. Quando a estratégia de busca é fixa, a configuração estacionária é alcançada primeiro nas situações em que o valor de τ é maior.

As equações diferenciais obtidas, e que constituem uma primeira aproximação para o modelo discreto, descrevem muito bem a dinâmica do sistema para as estratégias de busca próximas do regime balístico. Foi mostrado que, para o regime totalmente balístico ($\mu = 1,0$), as equações diferenciais possuem solução exata e o tempo transiente é caracterizado por um comportamento de tipo exponencial. A fórmula da relação inversamente proporcional entre o número de alvos disponíveis e a distância característica é obtida no modelo contínuo de forma exata, descrevendo com boa concordância a configuração estacionária do modelo discreto.

A aproximação de campo médio contida no processo de aniquilação de alvos impõe correções nas estratégias de busca do modelo contínuo para que se adéque ao modelo discreto. A relação de correção entre MC e MD, para as diferentes distâncias características, se estabelecem por meio de uma função logarítmica. A fórmula mostra que, à medida que τ aumenta, a estratégia de busca do modelo contínuo que descreve a estratégia no MD se aproxima do regime balístico. Das equações diferenciais foi construído um espaço de parâmetros do modelo contínuo, mostrando que diferentes pares de parâmetros (μ, τ) levam à mesma configuração estacionária no número de alvos no ambiente.

A estratégia de busca considerada ótima ($\mu_{opt} = 2,0$) exhibe diferentes valores estacionários para o número de alvos no ambiente à medida que cresce o valor da distância característica, mostrando que, em um ambiente finito, aliado a um forrageamento de tipo destrutivo, há diferentes estratégias que levam à otimização da taxa de encontro. A comparação entre os espaços de parâmetros obtidos no MC e no MD mostrou que o expoente μ não influencia a dinâmica do ambiente de busca durante o transiente, na direção da configuração estacionária, embora a dinâmica seja dependente da distância característica.

A eficiência de busca que se mostrou ótima, para uma distância característica fixa, é aquela em que $\mu \rightarrow 1$. O modelo contínuo prediz de maneira bastante satisfatória o comportamento de tipo exponencial da eficiência de busca durante o transiente, bem como o limite estacionário em que $\eta \sim 1/\tau$. O MC descreve melhor a eficiência para as estratégias próximas do regime balístico porque a aproximação de campo médio não leva em consideração flutuações na distribuição espacial dos alvos.

Como propostas para trabalhos futuros, estamos calculando o espaço de parâmetros para o número de alvos encontrados pelo caminhante, isto é, $N_a(t)$. Nosso intuito, também, é obter os espaços de parâmetros completos obtidos via simulação computacional, tanto para o número de alvos disponíveis quanto para o número de alvos encontrados pelo caminhante. Como nas simulações ocorrem flutuações estocásticas nas grandezas de interesse, o tempo computacional para se obter a configuração estacionária é bastante longo. Algo a se investigar, também, é como a troca das funções que descrevem o processo de criação de alvos pode afetar o comportamento do transiente. Testes preliminares, em que o processo de criação é descrito por uma função de comportamento exponencial, mostraram que o transiente diminui consideravelmente.

SIMULANDO COMPUTACIONALMENTE A MOTILIDADE DA ASSOCIAÇÃO C. COARCTATUS-VORTICELLAS

Neste capítulo, abordamos um método para a modelagem e simulação computacional do movimento da associação Chaetoceros-Vorticellas. Apresentamos uma hipótese para descrever o movimento dessa associação: se o número de partículas que passam por uma unidade de área na região próxima aos ciliados for menor do que um valor previamente estabelecido, os pedúnculos das Vorticellas se contraem na direção da diatomácea Chaetoceros coarctatus, transmitindo um ângulo de giro¹, que faz com que a associação mude a direção do seu movimento. Microcorrentes de fluidos contendo alimentos são geradas pelo movimento dos cílios do protista. Estas microcorrentes de alimentação se difundem no meio marinho e servem de transporte de alimentos a outros organismos, formando, desse modo, um elo entre a comunidade microbiológica e grandes organismos. Realizamos simulações computacionais que descrevem o movimento da associação Chaetoceros-Vorticellas em meios com diferentes números de partículas, e comparamos os resultados com os dados experimentais.

4.1 Introdução

O estudo do movimento é um elemento chave para compreender várias compensações ecológicas [96], [97]. A capacidade de movimento influencia fortemente as trocas entre os indivíduos, bem como a exploração adequada do meio ambiente. Tais interações incluem probabilidade de acasalamento, dinâmica presa-predador, migração e busca de condições ambientais adequadas etc [96], [98]. De fato, as características mecânicas e metabólicas distintas, e as estratégias de movimento associadas a um comportamento de locomoção específico de um indivíduo podem determinar seu sucesso de sobrevivência e reprodução,

¹ Turning angle

estabelecendo assim sua adequação a um determinado ecossistema [11], [74].

Entre as inúmeras interações biológicas, uma consideravelmente importante é a simbiose [99], [100]. Em muitos casos concretos, os diferentes tipos de relações simbióticas positivas (mutualismo e comensalismo) podem resultar em mecanismos-chave que conduzem processos evolutivos e ecológicos relevantes [101], [102]. Portanto, vários aspectos do movimento de organismos vivos não são uma exceção a possíveis ligações simbióticas. Na verdade, eles podem variar de comensal relativamente simples (por exemplo, cowbirds capturando insetos liberados pelo gado que se movem no pasto [103]) e mútuos (por exemplo, pássaros dispersando sementes de um grande número de espécies de plantas [104], [105]), a exemplos sofisticados de conexões mutualísticas, como o transporte de nutrientes no nível celular entre algas-líquens [106], fungos vegetais [107] e fungos algas [108], ou bactérias magnetotáticas subjacentes à detecção magnética em animais [109].

Um caso intrigante de simbiose, levando a um rico padrão de movimento combinado, é aquele entre a diatomácea central *Chaetoceros coarctatus* e o ciliado peritríqueo *Vorticella* oceânica, amplamente divulgado em vários estudos. O epibionte *V. oceânica* foi descrito inicialmente através de amostras coletadas no mar dos Sargaços, onde foi encontrado em consórcio com a diatomácea *C. coarctatus* [110]. Amostras examinadas, provenientes da costa do Pacífico da América do Norte, detectaram um grande número de *V. oceânica* ligado a *C. coarctatus* [111].

Estudos realizados por três anos na baía de Otsuchi, no Japão, considerando a distribuição vertical de diatomáceas do gênero *Chaetoceros*, encontraram, também, uma grande abundância de *C. coarctatus* associada a *V. oceânica* [112]. Uma ampla diversidade de espécies de diatomáceas do gênero *Chaetoceros* foi registrada nas águas costeiras da Índia e nas regiões do Oceano Índico, e entre essas espécies, foram encontradas cadeias de *C. coarctatus* em consórcio com o peritríqueo *V. oceânica* [113]. Relatos do consórcio *C. Coarctatus*-*V. Oceânica* no Atlântico Sul, indicam sua ampla distribuição em águas tropicais [114].

Nesse contexto, é que surge a física. Um dos aspectos fundamentais da física é a compreensão da natureza por meio do desenvolvimento de modelos. De um modo geral, esses modelos procuram descrever os fenômenos observados, se não de uma forma total, pelo menos parcial. Os métodos para o desenvolvimento desses modelos têm se diversificado muito nas últimas décadas [115], [116], mas basicamente consistem em algoritmos ou heurísticas expressos em forma matemática. Dentre esses métodos, um que vem ganhando destaque é a modelagem computacional, que consiste no uso de computadores para simular e estudar o comportamento de sistemas complexos, unindo ferramentas matemáticas, conhecimentos em Física e técnicas de computação [117].

Em sistemas físicos, as técnicas de modelagem computacional são usadas em diversas áreas. São utilizadas para estudar qualitativamente os papéis da excitação e inibição dos

neurônios de sub-redes neurais² [118], caracterizar de maneira precisa a estrutura de materiais heterogêneos e a microestrutura de materiais complexos [119] fornecendo informações sobre as propriedades morfológicas e espaciais desses materiais. Animações bi e tridimensionais descrevem o movimento do fluxo das células sanguíneas [120] e as dissonâncias em cavidades de radiofrequências utilizadas em aceleradores de partículas [121]. A modelagem e a simulação computacional são utilizadas, em sistemas biológicos, para descrever o movimento e a interação de sistemas celulares [122], a sensibilidade espacial e temporal dos organismos unicelulares a estímulos externos [123] e a forma como crescem os tecidos celulares das plantas e dos animais [124].

Dentre as características relevantes que contribuíram para a disseminação da modelagem computacional em pesquisas científicas está a de entender sistemas de difícil descrição por meio da implementação de hipóteses, na maioria das vezes, simples. Isto faz com que, em Física teórica, os métodos de modelagem computacional tornem-se uma espécie de “laboratório”, fornecendo informações qualitativas e quantitativas relevantes de tais sistemas. Desta forma, os métodos de modelagem computacional representam uma conexão importante entre a Física teórica e a experimental.

Apresentamos, neste capítulo, um método de modelagem computacional aplicado a um organismo biológico: a associação *Chaetoceros-Vorticellas*. Este protista pode ser encontrado na costa do litoral paulista, mais especificamente nas superfícies das águas da praia de Ubatuba. Estes micro-organismos, que pertencem ao grupo dos ciliados, geram, por meio do movimento de seus cílios, microcorrentes de fluidos que transportam alimentos para bactérias e outras pequenas células no meio ambiente onde vivem, representando um elo importante entre as comunidades microbiológicas e organismos maiores.

Este trabalho é uma colaboração com o Instituto Oceanográfico da Universidade de São Paulo (IOUSP), que nos forneceu os dados experimentais na forma de vídeos que apresentam o comportamento do epibionte. Por meio de um código em linguagem Fortran 90, desenvolvemos uma rotina que descreve (baseado em uma hipótese que abordaremos neste capítulo) o comportamento do epibionte e, utilizando o software gráfico Gnuplot versão 4.6, elaboramos animações em forma de vídeo, as quais comparamos com os dados experimentais.

4.2 O Epibionte *Vorticella sp.* e a Associação *C. coarctatus-Vorticella*

Epibiontes são organismos que vivem em relação epibiótica com outros organismos [125]. Essa relação, é uma categoria de simbiose em que a relação estabelecida é de comensalismo, isto é, o epibionte se beneficia de uma espécie que não é afetada pela relação de simbiose. Estes organismos vivem presos à superfície de outros organismos vivos [126]. Pertencem ao grupo dos protistas e vivem unidos, geralmente, às diatomáceas, espécie de

² network motifs

alga que pertence, também, ao grupo dos protistas, fornecendo pouco ou nenhum benefício aos seus hospedeiros. Nos itens **A** e **B** da figura 4.1, mostramos exemplos de epibiontes associados às diatomáceas.

A diatomácea apresentada no item **B** da figura 4.1 é um dos gêneros mais comuns do fitoplâncton marinho, conhecida como *Chaetoceros*. É caracterizada pela presença de setas e pela sua estrutura central ser formada por uma cadeia de células. Presos à espécie de *Chaetoceros*, *C. coarctatus*, no item **C**, observamos o epibionte *Vorticella* oceânica. Esses organismos aparecem como epibiontes em uma ampla variedade de substratos, como por exemplo, plantas aquáticas e detritos orgânicos tanto em água doce quanto salgada.

No item **B** da figura 4.1, a *Vorticella* presa ao *Chaetocero* é do gênero sésil que consiste em um zooide (estrutura na forma de de sino invertido conforme mostrado no item **C**) e um pedúnculo que é a estrutura que se prende à diatomácea. Desse modo, epibiontes se encontram amplamente difundidos pelo mundo dos plânctons, cuja escala de tamanho é da ordem do micrometro, e ocupam a superfície das águas nos oceanos. Neste micromundo onde vivem, o transporte dos materiais, basicamente bactérias e nutrientes, ocorre por meio dos vórtices gerados pela viscosidade do fluido que resiste à tensão de cisalhamento.

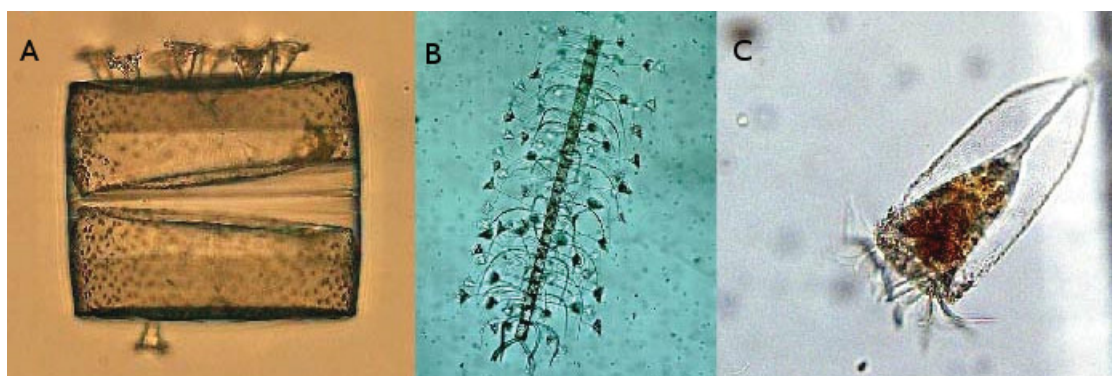


Figura 4.1 – Epibiontes *Vorticella* sp. unidos a seus hospedeiros, as diatomáceas. Em **A**), o epibionte *Vorticella* sp. está unido à diatomácea *Coscinodiscus Wailesii* sp; e em **B**), unida à diatomácea *Chaetoceros* sp. Na figura **C**), mostramos a *Vorticella* sp. juntamente com os cílios utilizados para gerar as microcorrentes de alimentação.

Isto faz com que os materiais sejam transportados basicamente por meio de difusão. O processo de difusão, em alguns casos, pode ser considerado um processo lento para certos organismos (como os epibiontes) manterem sua subsistência nestes ambientes. Razão pela qual estes organismos utilizam-se de correntes de alimentação produzidas por flagelos ou cílios para capturar bactérias e pequenas células eucarióticas. Mostramos, no item **C**) da figura 4.1, os cílios utilizados pela *Vorticella* para gerar as microcorrentes de alimentação.

Estas microcorrentes permitem que os protistas movimentem uma quantidade de fluido $\sim 10^4 - 10^6$ vezes o seu volume corporal por hora. À guisa de comparação, esse volume de fluido é equivalente a um homem de porte médio movimentar, em torno do seu corpo, um volume de água equivalente a dez piscinas olímpicas por hora, em que cada piscina

tem um volume de $2,5 \times 10^6 l$ [127]. Na dimensão microscópica em que estes organismos vivem, este volume de material movimentado pode influenciar, por exemplo, o mundo dos fitoplânctons, em que a produção fotossintética é considerada ser limitada pela taxa de difusão dos nutrientes [128]. Fitoplânctons são micro-organismos que possuem capacidade fotossintética, colaborando na produção de oxigênio na atmosfera [129].

Embora se conheça a influência das microcorrentes na difusão de nutrientes, sabe-se muito pouco sobre os mecanismos envolvidos no movimento do epibionte *Vorticella sp.* unido à diatomácea *Chaetoceros sp.* (figura 4.1, item **B**). Descreveremos, na próxima seção, um método para modelar computacionalmente a associação e, aplicando regras (que também descreveremos a seguir) às simulações computacionais, buscaremos entender de forma qualitativa os mecanismos desse movimento.

4.3 O Método para o Modelo Computacional

Nosso propósito é entender qualitativamente (e na medida do possível quantitativamente) os mecanismos envolvidos no movimento da associação *Chaetoceros coarctatus* e dos epibiontes *Vorticella* oceânica a ela aderida. Para este fim, desenvolvemos um modelo computacional que descreve a dinâmica da associação por meio de um mapa bidimensional (ou seja, um sistema de equações dinâmicas, mas que são discretizadas no tempo para simplificar suas simulações numéricas) [130].

Na verdade, nossa abordagem é mista, aspectos puramente mecânicos são introduzidos através de simples equações cinemáticas com velocidades lineares e angulares atualizadas por intermédio da aplicação direta da segunda lei de Newton. Por sua vez, aspectos estocásticos tais como a reação dos organismos às condições do meio ambiente, também são levadas em conta ao determinarem (aleatoriamente) as forças e torques que modificam as referidas velocidades.

Por último, apesar do movimento se dar em meio líquido, nenhuma descrição hidrodinâmica é considerada. Porém, na definição dos parâmetros relevantes do modelo, aspectos tais como viscosidade e número de Reynolds são introduzidos de forma fenomenológicas (através de escolhas para os parâmetros que melhor ajustem os dados empíricos).

O estado do sistema, que nesse caso é o movimento da associação a cada iteração, é descrito: (1) pela posição do centro geométrico \mathbf{r} da diatomácea; (2) pelo ângulo de giro ϕ da diatomácea, causado pela retração do pedúnculo de cada *Vorticella sp.* (na direção da diatomácea); e (3) pela velocidade do centro geométrico, \mathbf{v} . Assim, as equações que definem a dinâmica do movimento da associação a cada iteração (nos instantes de tempo

$n = 1, 2, 3, \dots$) são,

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \mathbf{v}_n \Delta t, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{1}{2R} \widetilde{\mathbf{V}}_n, \quad (4.2)$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \frac{1}{2R} \widetilde{\Phi}_n. \quad (4.3)$$

A Eq. 4.1, descreve a evolução temporal da posição do centro geométrico da associação e, convém notar, está acoplada com a Eq. 4.2. Já a Eq. 4.3 atualiza o incremento ao ângulo de giro.

É observado, de acordo com os dados experimentais, que a retração dos pedúnculos das *Vorticellas* imprimem à diatomácea uma força que causa uma rotação à associação, isto é, cada retração gera um torque. O torque, por sua vez, produz uma variação no ângulo, com a qual a associação *Chaetoceros-Vorticellass* se reorienta no ambiente. Esse movimento de reorientação é executado em um meio em que a viscosidade do fluido e a inércia da associação influenciam o seu movimento. Entretanto, construir um modelo que descreva o movimento de um organismo e que leve em conta, explicitamente, a viscosidade do fluido e a inércia do organismo nesse fluido pode constituir-se uma tarefa bastante complicada. Assim, associamos às equações que atualizam a velocidade e o ângulo, um parâmetro que tem a finalidade de descrever a dissipação do momento linear e angular para o meio. É o parâmetro R , presente nas Eqs. 4.2 e 4.3. Através de comparações com dados de laboratório, verificamos que o parâmetro R pode ser relacionado com o número de Reynolds (Re).

Em dinâmica dos fluidos, o número de Reynolds é um número adimensional que representa, do ponto de vista físico, um quociente entre duas forças: forças inerciais e forças viscosas [131]. As forças inerciais são modeladas de acordo com o produto da velocidade média do fluido (v) por sua massa específica (ρ). As forças de viscosidade, por sua vez, são definidas por meio da razão entre a viscosidade dinâmica do fluido (μ), que nada mais é que a velocidade com que o fluido se movimenta, e a longitude característica do fluido, \mathcal{D} . Desse modo, o número de Reynolds é dado por

$$Re = \frac{v\rho}{\mu/\mathcal{D}}. \quad (4.4)$$

O número de Reynolds descreve, então, de que forma ocorre o escoamento de um fluido ao longo de uma determinada região. Valores para o número de Reynolds menores que 2000 determinam um fluxo do tipo laminar, enquanto que valores maiores do que 4000, caracterizam turbulência no escoamento do fluido.

No nosso presente contexto verificamos (através de comparação entre simulações e dados empíricos) que a razão entre as forças viscosas e inerciais são da ordem de poucas

unidades (tipicamente 2), levando à $Re \approx 1/2$. Assim, ao associarmos o parâmetro R às funções que incrementam valores ao ângulo e à velocidade, devemos considerar como o ângulo de giro e a velocidade dependem da forma com que o fluido, em torno do epibionte, escoam durante a sua retração na direção da diatomácea. Assumimos desse modo que $R \sim Re \approx 1/2$ para representar, além de um escoamento laminar, uma proporção duas vezes maior para a força de viscosidade em relação à força inercial.

Na Eq. 4.2, bem como na Eq. 4.3, os termos $\tilde{\Phi}_n$ e $\tilde{\mathbf{V}}_n$ expressam as funções que incrementam, respectivamente, os valores de ângulo e velocidade a cada iteração. Estas funções dependem dos parâmetros do sistema, ou seja, $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(R_v, \mathbf{e}_n^{(i)}, \mathbf{p}_n^{(j)}, S_n^{(i)})$ e $\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{V}}(R_v, \mathbf{e}_n^{(i)}, \mathbf{p}_n^{(j)}, S_n^{(i)})$. Os parâmetros que descrevem a dinâmica do movimento da associação são: (a) um “raio de visão” efetivo R_v , que descreve a “percepção” de cada uma das *Vorticellas* acerca das partículas de alimento que estão na sua vizinhança; (b) o vetor posição $\mathbf{e}_n^{(i)}$ do i -ésimo epibionte no instante de tempo atual n (por uma questão de conveniência, “ i ” ímpar designará os cílios da região superior da associação e “ i ” par, os cílios da parte inferior da associação); (c) o vetor posição $\mathbf{p}_n^{(j)}$ da j -ésima partícula de alimento pertencente ao meio; e (d) o estado $S_n^{(i)}$ do i -ésimo pedúnculo do epibionte ($S_n^{(i)}$ assume o valor um (zero) quando o pedúnculo está estendido (retraído)).

As funções que incrementam valores ao ângulo e à velocidade são definidas como

$$\tilde{\Phi}_{n+1} = \frac{2R}{1+2R} [\Phi_n(R_v, \mathbf{e}_n^{(i)}, \mathbf{p}_n^{(j)}, S_n^{(i)}) + \tilde{\Phi}_{n-1}], \quad (4.5)$$

$$\tilde{\mathbf{V}}_{n+1} = \frac{2R}{1+2R} [\mathbf{V}_n(R_v, \mathbf{e}_n^{(i)}, \mathbf{p}_n^{(j)}, S_n^{(i)}) + \tilde{\mathbf{V}}_{n-1}], \quad (4.6)$$

em que as condições iniciais são $\tilde{\Phi}_0 = \tilde{\mathbf{V}}_0 = 0$. Para as funções Φ_n e \mathbf{V}_n ver a seguir.

É razoável considerar que quando o pedúnculo do epibionte se retrai na direção da diatomácea, parte do seu momento linear é transferido para o meio como uma forma de dissipação. Consequentemente, o mesmo ocorre com o momento angular. Desse modo, ao adotarmos $R = 1/2$, estamos considerando que metade do valor calculado é empregado no movimento da associação. A outra metade é dissipada pelo meio.

Um fator importante para a dinâmica total do sistema é a agitação do meio líquido nas proximidades do consórcio causada pela própria movimentação da *Vorticella*. Em princípio, isso deveria ser descrito por meio de equações hidrodinâmicas acopladas de “direção” do consórcio (estas últimas relacionadas a \mathbf{V}_n e Φ_n). Mas isso está além do escopo do presente modelo. Portanto, tentamos imitar o efeito da perturbação do meio aquático por meio de uma aproximação simplificada, introduzindo termos de *feedback* nas Eqs. 4.5 e 4.6. Supomos que a mudança na velocidade e direção no tempo t_{n+1} depende da autopropulsão da associação no tempo t_n (\mathbf{V}_n e Φ_n) mais os termos fenomenológicos retardados $\tilde{\mathbf{V}}_{n-1}$ e

$\tilde{\Phi}_{n-1}$, representando a perturbação média através de uma aproximação de resposta linear simples (do parâmetro de acoplamento $2R/(1+2R)$, numericamente ajustável). Dessa forma, devemos resolver as Eqs. 4.5 e 4.6 recursivamente aplicando as condições iniciais para $\tilde{\Phi}_0$ e $\tilde{\mathbf{V}}_0$.

Desse modo, as funções Φ_n e \mathbf{V}_n correspondem, respectivamente, aos incrementos nos valores do ângulo e da velocidade, resultantes da interação da associação com meio de acordo com as regras do modelo (incluindo efeitos dissipativos). A função que descreve o incremento ao ângulo é definida de acordo com a expressão

$$\Phi_n = d\phi \sum_{i=1}^{epib.} H \left[\sum_{j=1}^{part.} H \left(\left| \mathbf{e}_n^{(i)} - \mathbf{p}_n^{(j)} \right| - R_v \right) H \left(\omega - r_n^{(i)} \right) S_n^{(i)} \right] (-1)^i \frac{(\mathbf{e}_n^{(i)} - \mathbf{r}_n) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n}{\delta(i)}. \quad (4.7)$$

Como se pode ver, a Eq.4.7, é um produto de três termos. No lado direito da equação, $d\phi$ corresponde ao pequeno valor de ângulo incrementado a cada instante de tempo. A função $H(x - a)$ é a conhecida função de Heaviside. É nula quando o argumento é menor do que zero e um quando o argumento é maior ou igual a zero. O termo central da Eq.4.7 soma a contribuição de cada epibionte para o incremento do ângulo. Essa contribuição é dependente do estado de cada um dos epibiontes a cada instante de tempo. Note que se não houver a retração do pedúnculo, não haverá acréscimo ao valor do ângulo.

É importante interpretar os termos envolvendo H na formula acima. Em primeiro lugar, temos que

$$H \left(\left| \mathbf{e}_n^{(i)} - \mathbf{p}_n^{(j)} \right| - R_v \right) = \begin{cases} 1, & R_v < \left| \mathbf{e}_n^{(i)} - \mathbf{p}_n^{(j)} \right|, \\ 0, & R_v \geq \left| \mathbf{e}_n^{(i)} - \mathbf{p}_n^{(j)} \right|. \end{cases} \quad (4.8)$$

Note que se $R_v < \left| \mathbf{e}_n^{(i)} - \mathbf{p}_n^{(j)} \right|$ não há partículas nas imediações do i -ésimo epibionte. Por outro lado, se $R_v \geq \left| \mathbf{e}_n^{(i)} - \mathbf{p}_n^{(j)} \right|$ então existem partículas dentro do alcance de detecção do epibionte, indicando assim certa disponibilidade de alimento. Baseado em tal fenomenologia, a Eq. 4.8 mostra que para que haja incremento ao ângulo, o raio de visão de cada epibionte deve ser menor do que a distância entre o vetor posição do i -ésimo epibionte, $\mathbf{e}_n^{(i)}$, e o vetor posição da j -ésima partícula, $\mathbf{p}_n^{(j)}$. Essa condição modela a premissa de que cada epibionte retrai o seu pedúnculo com o objetivo de mudar a direção de movimento da associação, tentando buscar uma nova região com maior densidade de alimento. Já quando $R_v \geq \left| \mathbf{e}_n^{(i)} - \mathbf{p}_n^{(j)} \right|$, mudanças de direção não são necessárias se o objetivo é ter um bom fluxo de partículas ao longo da presente direção de movimento do sistema composto.

Associamos ao modelo um parâmetro de assimetria à retração dos pedúnculos das *Vorticellas*. Esse parâmetro é descrito para variável, ω . É observado empiricamente que as *Vorticellas sp.* não retraem seus pedúnculos ao mesmo tempo, mesmo em ambientes com baixa densidade de alimento, onde a frequência de retração é maior. Em outras

palavras, cada epibionte tem uma certa independência no movimento da associação e essa independência pode estar associada a características internas do organismo do epibionte.

O parâmetro ω é, desse modo, uma probabilidade associada à retração do pedúnculo. Por isso, $\omega \in [0,1; 1,0]$. Veremos, mais adiante, que em ambientes com alta densidade de alimentos, há pouca retração dos pedúnculos. Isso dá consistência à premissa de que o epibionte retrai o pedúnculo para mudar a direção do movimento da associação. De maneira oposta, em ambientes com baixa densidade de alimentos, há uma maior frequência na retração dos pedúnculos dos epibiontes.

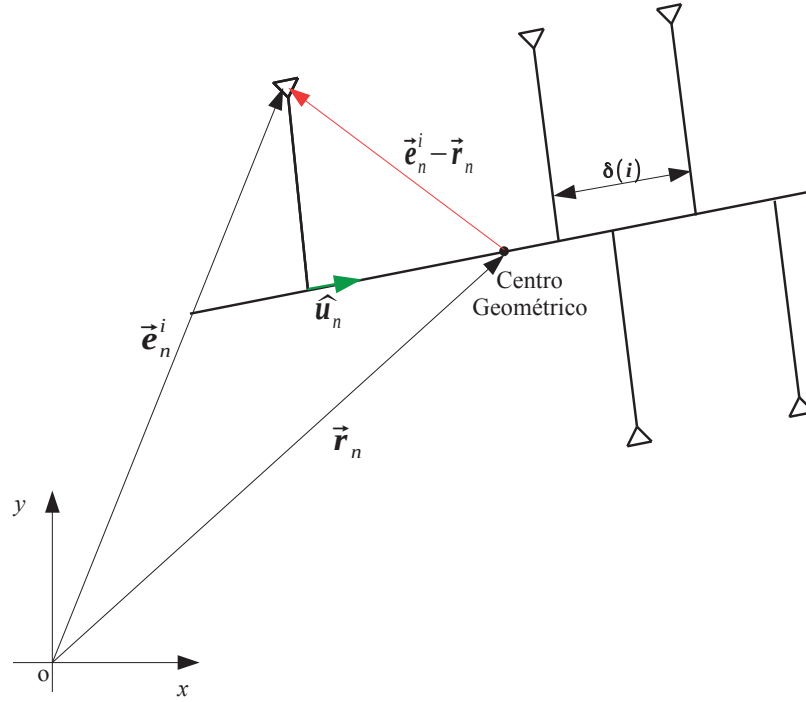


Figura 4.2 – Esboço dos vetores envolvidos no incremento do ângulo de giro. Partindo de um referencial que se encontra no ambiente, a figura descreve o incremento no valor do ângulo de acordo com a distância do epibionte ao centro geométrico. A vetor que descreve a diferença entre a posição do i -ésimo epibionte, $\mathbf{e}_n^{(i)}$ e a posição do centro geométrico, dado por $\mathbf{e}_n^{(i)} - \mathbf{r}_n$, é projetado na direção horizontal da diatomácea, representado pelo versor, $\hat{\mathbf{u}}_n$. Desse modo, o termo $\frac{(-1)^{(i)}}{\delta(i)} (\mathbf{e}_n^{(i)} - \mathbf{r}_n) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n$, informa o fator multiplicativo no infinitésimo de ângulo, $d\phi$. Este fator é tanto maior quanto mais afastado o epibionte se encontra do centro geométrico.

Assim, se a condição $R_v < |\mathbf{e}_n^{(i)} - \mathbf{p}_n^{(j)}|$ é atendida, um número aleatório $r_n^{(i)}$ é sorteado no n -ésimo instante de tempo. Se este número aleatório for maior ou igual ao parâmetro ω , então, o epibionte retrai seu pedúnculo e ocorre um incremento ao ângulo de giro da associação. Em termos da função de Heaviside, isso é descrito como:

$$H(\omega - r_n^{(i)}) = \begin{cases} 1, & \omega \leq r_n^{(i)}, \\ 0, & \omega > r_n^{(i)}. \end{cases} \quad (4.9)$$

Por outro lado, se o número aleatório sorteado for maior do que o parâmetro ω , o pedúnculo do epibionte não se retrai e o acréscimo ao ângulo de giro é nulo. Evidentemente que, para que ocorra a retração do pedúnculo, este, dever estar estendido. Por isso, o parâmetro $S_n^{(i)}$ descreve o estado do i -ésimo pedúnculo a cada instante de tempo. Assim, $S_n^{(i)}$, pode assumir dois valores: 1 para o caso em que o pedúnculo está estendido, e zero para o caso em que ele está retraído. Por fim, o terceiro termo do lado direito da Eq. 4.7 se refere ao fator multiplicativo no incremento do ângulo de giro. É possível ver por meio dos dados experimentais (vídeo nº02) que, os epibiontes mais afastados do centro de massa da diatomácea, tanto na região anterior quanto na região posterior transmitem um torque maior quando retraem seus pedúnculos.

Ainda sobre o parâmetro ω , em nossas simulações utilizamos $\omega = 0,8$ para simular a associação em ambientes com baixa densidade de partículas de alimentos, $\omega = 0,2$ para simular ambientes com alta densidade e $\omega = 0,5$ para simular um ambiente com densidade média de partículas de alimentos. Assim, o termo $(\mathbf{e}_n^{(i)} - \mathbf{r}_n) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n$ é a componente horizontal do vetor posição do epibionte no sistema de coordenadas cartesianas e com origem no centro geométrico da associação. Essa medida é dividida pela distância entre os epibiontes ao longo da diatomácea, $\delta(i)$, no qual o índice “ i ” designa os epibiontes da parte superior, se “ i ” for ímpar, e da parte inferior, se “ i ” for par.

A função \mathbf{V}_n , que descreve o incremento no valor da velocidade proveniente da interação da associação com o meio em que ela se encontra, é definida por meio da expressão

$$\mathbf{V}_n = dV \sum_{i=1}^{epib.} H \left[\sum_{j=1}^{part.} H \left(|\mathbf{e}_n^{(i)} - \mathbf{p}_n^{(j)}| - R_v \right) H \left(\omega - r_n^{(i)} \right) S_n^{(i)} \right] \mathbf{b}_n^{(i)}, \quad (4.10)$$

em que

$$\mathbf{b}_n^{(i)} = (-1)^{i+1} \sin(\phi_n^{(i)}) \hat{i} + (-1)^i \cos(\phi_n^{(i)}) \hat{j},$$

é o vetor que projeta o incremento no valor da velocidade nas direções x e y , respectivamente.

A Eq. 4.10, é semelhante a Eq. 4.7. O incremento no valor da velocidade, dV , ocorrerá somente se cada epibionte atender as disposições necessárias, dada pelo termo central do lado direito da Eq. 4.10, que é idêntico à Eq. 4.7, e cuja explicação detalhada já foi dada anteriormente. Assim, o incremento de velocidade de cada epibionte que reúne as condições necessárias à retração de seus pedúnculos, é projetado na direção x e y , de acordo com o vetor, $\mathbf{b}_n^{(i)}$.

O ambiente de busca modelado computacionalmente consiste em uma região plana, finita e de área $L \times L$. O “aquário” possui condições de contorno reflexivas, ou seja, quando a associação se aproxima de uma certa distância das bordas do ambiente, ela retorna novamente ao ambiente, porém, com a sua velocidade no sentido oposto ao ângulo de incidência. Esta condição faz com que a associação mude o sentido da sua trajetória toda vez que se aproxime das extremidades do ambiente.

As partículas no ambiente possuem condições de contorno periódicas e descrevem um movimento do tipo browniano, mas com sentido preferencial na direção negativa do eixo x . Se uma partícula percorre o ambiente e alcança uma de suas extremidades, ela reaparecerá imediatamente na outra extremidade. As condições no movimento das partículas que compõe o ambiente modelam o movimento das partículas em torno da associação *Chaetoceros-Vorticellass sp.* É sabido que o movimento das partículas em torno do epibionte é causado pelas microcorrentes de alimentação, geradas pelos cílios das *Vorticellas*.

Uma vez que estamos interessados em estimar, qualitativamente, as características do movimento da associação *Chaetoceros-Vorticellass* e não os efeitos gerados pelas microcorrentes no ambiente, as regras que descrevem o movimento das partículas, com relação à associação, são uma boa aproximação para o estudo da associação em relação ao fluxo de partículas gerados pelos ciliados.

As análises experimentais acerca do comportamento natatório da associação *Chaetoceros-Vorticellas* foram realizadas em aquários cúbicos, isto é, em um ambiente em três dimensões. Conforme mencionamos anteriormente, o ambiente da simulação computacional consiste em uma região plana. Esta questão tem implicações importantes e merece especial atenção.

Experimentalmente, foram realizadas análises do comportamento natatório da associação em ambientes com diferentes concentrações de alimento, isto é, em ambiente sem alimento, com baixa densidade de alimento (5%), média densidade (50%) e alta densidade (100%). Desse modo, surge uma questão: quantas partículas, em um ambiente computacional de duas dimensões, correspondem a um ambiente real com alta densidade de alimento?

Para respondermos a esta questão devemos relacionar o número de partículas na simulação, com a concentração de alimento utilizada experimentalmente. Esta relação pode ser estabelecida por meio da equação,

$$P_{sim} = \rho_{exp} (L_{sim})^2 E_{sim}, \quad (4.11)$$

na qual P_{sim} , representa o número de partículas correspondente à simulação computacional e ρ_{exp} , é a concentração de alimentos por mililitro, obtida experimentalmente. A largura do aquário usada na simulação é dada por L_{sim} e, E_{sim} , define a espessura do ambiente computacional que será considerada para o cálculo do número de partículas.

A figura 4.3, esboça as distâncias relacionadas no cálculo da espessura do ambiente da simulação. A percepção que um determinado epibionte possui acerca de uma partícula é descrito pela distância, d , e c , define o tamanho do pedúnculo. O comprimento A , mostra a distância da partícula à base do pedúnculo, e pode ser expresso em termos do comprimento entre o centro geométrico e a partícula, expresso por p , e a distância do centro geométrico até o epibionte dada por, $h/2$.

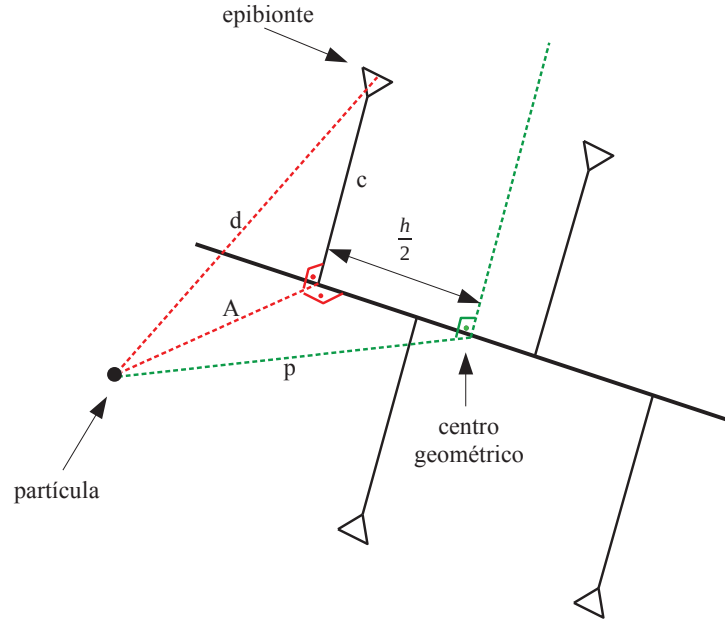


Figura 4.3 – Esboço descritivo das distâncias consideradas no cálculo da espessura do ambiente da simulação. A distância que descreve o raio de visão do epibionte em relação a partícula, é representada por d , e c , define o tamanho do pedúnculo. O comprimento A , traça a distância da base do pedúnculo à partícula, e é descrito em termos da distância do centro geométrico até a partícula, dada por p , e da distância do centro geométrico ao epibionte, dada por $h/2$. Desse modo, a espessura do ambiente da simulação é descrito em termos dos parâmetros do sistema.

Observando os dados experimentais (vídeo nº 02) é possível ver que o raio de visão é maior do que o comprimento da *Vorticella*, haja visto o fluxo de fluido (e alimento) no em torno da associação, causado pelas microcorrentes. Dessa forma, consideramos $c = 0,2$, e $d = c\sqrt{2}$. O comprimento h , foi considerado a partir da quantidade de epibiontes da parte inferior da associação (seis epibiontes), uma vez que, há menos epibiontes na parte inferior e, portanto, o valor de h é maior, assim, $h = 1/7 \approx 0,1428$. Vinculando a espessura do ambiente da simulação aos parâmetros do sistema, podemos escrevê-la como,

$$E_{sim} = 2p = \sqrt{4(d^2 - c^2) - h^2} \approx 0,3736.$$

O cálculo da largura do ambiente da simulação leva em consideração a razão entre o comprimento do epibionte na simulação e seu tamanho real, além de considerar, também, o volume real do aquário. Matematicamente, podemos escrever

$$L_{sim} = \frac{e_{sim}}{e_{exp}} \sqrt[3]{V_{exp}}.$$

Na expressão acima, e_{sim} , representa o comprimento do epibionte na simulação e vale uma unidade. O comprimento real do epibionte é dado por $e_{exp} = 5 \times 10^{-6} \mu m$. Se tomarmos o volume real do aquário que é $V_{exp} = 0,125 m^3$, teremos uma largura para simulação igual a

$L_{sim} = 10000$. Isso corresponderá a um ambiente com um número de partículas impraticável de ser simulado.

Desse modo, para que fosse possível a simulação computacional, consideramos a largura do ambiente de simulação como sendo de uma ordem de grandeza quatro vezes maior do que a ordem de grandeza da associação *Chaetoceros*-*Vorticellass*, consideramos, desse modo, $L_{sim} = 200cm$. Para uma concentração com 100% de alimento, temos experimentalmente, $\rho_{exp} = 1,0597 \text{ células/ml}$. Substituindo os valores da simulação que deduzimos, obtemos o número de partículas correspondente a uma concentração de 100% de alimento no ambiente real,

$$\begin{aligned} P_{sim} &= \rho_{exp} (L_{sim})^2 E_{sim} \\ P_{sim} &= (1,0597 \text{ cel/cm}^3)(200 \text{ cm})^2(0,3736 \text{ cm}) \\ P_{sim} &\approx 16000 \text{ partículas} \end{aligned}$$

A cadeia de *Chaetoceros coarctatus* é modelada computacionalmente por meio de um centro geométrico, de onde partem outros dois pontos equidistantes do centro: o ponto anterior e o ponto posterior ao centro geométrico. Estes pontos constituem as extremidades dos *C. coarctatus*. Com o intuito de tornar a modelagem computacional da diatomácea o mais semelhante possível com os dados observados, dividimos a construção computacional da cadeia *Chaetoceros coarctatus* em duas regiões: superior e inferior. A região superior é composta de dez pontos, dispostos ao longo dos pontos que formam as extremidades do centro geométrico, e a região inferior é composta por oito pontos.

Estes pontos, separados por distâncias iguais, formam as bases dos pedúnculos ligados diatomácea. Tomando como exemplo ainda a região superior, de cada um dos dez pontos que constituem as extremidades dos pedúnculos partem pontos paralelos a estes, e que formam as extremidades de cada uma das *Vorticellas*. Na figura 4.4, mostramos um esboço dos pontos que formam a estrutura do *C. coarctatus* e dos pontos que formam a extremidade da *V. oceânica*.

Os pontos em vermelho na figura 4.4 representam as extremidades da diatomácea. Cada par de pontos com a mesma cor representa, respectivamente, a base do pedúnculo e a extremidade do zooide que pertence à região superior e inferior da associação. Por exemplo: os pontos em amarelo na figura descrevem respectivamente a base do pedúnculo e a extremidade do zooide da sétima *Vorticella* da região inferior. Os pontos em verde claro descrevem, da mesma forma, a base pedúnculo e o zooide da primeira *Vorticella* região superior.

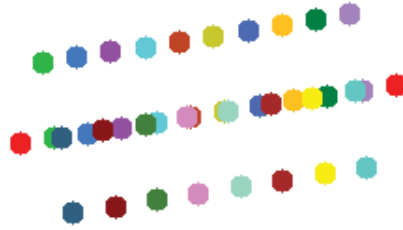


Figura 4.4 – Conjunto de pontos que formam a estrutura dos *Chaetoceros sp.* e a extremidade das *Vorticellas*. Os pontos em vermelho constituem as extremidades da diatomácea. Os pares de pontos coloridos formam a base dos pedúnculos e a extremidade das zooides contidos na parte superior e inferior do epibionte.

As estruturas dos zooides, que possuem uma forma aproximadamente cônica, foram modeladas por meio de triângulos. Mostramos a estrutura de uma *V. oceânica*. (pedúnculo+zoóide) na figura 4.5.

A figura 4.5 descreve o modo como modelamos o pedúnculo e o zoóide ciliado. Projetamos o ponto que constitui a extremidade superior da *Vorticella* (ponto verde entre os dois pontos em vermelho na parte superior da figura) a uma distância $\mathcal{D} = 0,1 \text{ u.m}$ abaixo da sua extremidade, representado na figura 4.5 pelo ponto em vermelho entre os dois pontos de cor verde. Partindo deste ponto projetado, projetamos outros dois pontos a uma distância $x = \mathcal{D} \tan(\pi/3)$, representados pelos outros dois pontos em vermelho.



Figura 4.5 – Conjunto de pontos que descrevem a estrutura da *Vorticella*. Os pontos em vermelho representam uma aproximação para a forma cônica do zoóide. Os pontos em verde formam a base do pedúnculo e a extremidade do zoóide, que pertencem a região superior (ou inferior) da *Vorticella* conforme mencionado na figura 4.4.

Modelamos as estruturas da diatomácea, pedúnculo e zooides por meio de pontos, para que se tornasse mais simples a manipulação dos arquivos de dados gerados pela simulação na hora de gerar as animações por vídeo. Os arquivos de saída dos dados contêm o conjunto de pontos que descrevem a dinâmica do movimento da associação ao longo do tempo. No lado esquerdo da figura 4.6, mostramos a modelagem computacional da *Vorticella* sp. em comparação com os dados experimentais. No lado esquerdo da figura 4.6, mostramos a modelagem computacional da *Vorticella* sp. em comparação com os dados experimentais.

Em princípio estamos interessados em entender, de forma qualitativa, os mecanismos envolvidos na dinâmica da associação Chaetoceros-Vorticellas. Por isso a cada instante de tempo, os pontos que formam o corpo do epibionte são atualizados de acordo com as regras de movimento que descrevemos anteriormente. Vemos, pelos dados experimentais³ (vídeo 1), que os pedúnculos das *Vorticellas* se retraem na direção da diatomácea mudando a direção do movimento de toda a colônia.



Figura 4.6 – Comparativo entre a associação (Chaetoceros-Vorticellas) modelado computacionalmente (à esquerda) e os dados observacionais (à direita). O lado esquerdo da figura mostra o conjunto de pontos ligados por linhas, formando, no arquivo de saída, a associação.

Partiremos da premissa de que cada um dos ciliados, que compõem o protista, se retrai quando um determinado número de partículas deixa de passar pela área em volta dos cílios, isto é, se o número de partículas que passam por uma dada Vorticella for menor do que um número predeterminado, esta Vorticella retrai seu pedúnculo, transmitindo um impulso, que, por sua vez, incrementa a velocidade do epibionte na direção em que ocorre a retração. Além disso, este incremento na velocidade é proporcional à posição de cada uma das Vorticellas em relação ao centro geométrico, ou seja, os epibiontes mais próximos das extremidades (e por consequência mais afastados do centro geométrico) transmitem um incremento de velocidade maior na direção de retração.

Na próxima seção, apresentaremos os resultados da aplicação desta premissa para ambientes com uma quantidade diferente de partículas. Queremos comprovar a hipótese de que a Vorticella utiliza a estratégia de retração de seus pedúnculos e consequente mudança

³ https://drive.google.com/drive/u/0/folders/10FKKQa2_ZZXC215HWPV7Q1cfANfoAaFC

de direção em seu movimento para procurar regiões no ambiente com maior abundância de alimentos.

4.4 Resultados

Conforme mencionamos na seção anterior, nossa hipótese inicial é a de que o epibionte *Vorticella* ajusta o seu movimento a fim de encontrar regiões em seu habitat com o maior número possível de alimentos. Para testarmos esta hipótese, realizamos simulações computacionais que descrevem o movimento da *Vorticella* em ambientes com diferentes números de partículas que representaram, na simulação, a quantidade de alimentos no ambiente.

Em cada instante de tempo, são contados os números de partículas que passam pelo raio de visão das *Vorticellas*. Enquanto as partículas estiverem passando pela área delimitada pelo seu raio de visão, os pedúnculos das *Vorticellas* não se retraem, significando que cada epibionte se encontra satisfeito com o número de partículas presente na região. Se caso contrário, o número de partículas na área for menor do que um valor de referência, os pedúnculos se retraem, propagando um incremento de velocidade na direção da diatomácea que realiza uma mudança na direção de movimento, por meio do ângulo de giro. Isto faz com que o epibionte procure partículas em outras regiões do ambiente.

Esta premissa faz com que cada epibionte ajuste o movimento da associação, à procura de regiões do ambiente que satisfaçam a todas as *Vorticellas* da associação. Em nossas simulações, o valor de referência utilizado é $N_{ref} = 1$ partículas, isto é, a cada iteração, deve passar uma partícula pelo raio de visão de cada *Vorticella*. Do contrário a *Vorticella* retrai seu pedúnculo. Além disso, estabelecemos um tempo para que os pedúnculos permanecessem estendidos e/ou retraídos. Cada *Vorticella* verifica o número de partículas que passam por uma unidade de área; se o número for menor do que N_{ref} , a *Vorticella* continua com o seu pedúnculo estendido ou retraído, por um certa quantidade de iterações antes de realizar a extensão ou retração do seu pedúnculo. Esta condição faz com que a retração e/ou extensão do pedúnculo de cada *Vorticella* seja, de certa forma, independente umas das outras.

Analisamos, por meio das simulações computacionais, a sinuosidade das trajetórias da associação nos ambientes com diferentes concentrações de partículas e comparamos os resultados com os obtidos experimentalmente. Para realizar esta análise, utilizamos a razão entre o deslocamento líquido e o deslocamento bruto (NGDR)⁴. Esta razão entre os deslocamentos é uma métrica muito usada na análise dos padrões de movimento de organismos aquáticos [132–134].

Uma das dificuldades em se obter registros precisos do padrão de movimento desses organismos é justamente o meio ambiente em que se encontram. Além disso, há um problema

⁴ *Net to gross displacement ratio*

de escala resultante do tamanho dos organismos que são, neste caso, da ordem do micrometro. O problema consiste, basicamente, em conseguir uma boa resolução da sua trajetória, dentro de um intervalo de tempo razoável [135]. Isto significa ter que optar em obter dados experimentais com alta resolução espacial, porém, com curta duração ou uma série temporal mais longa com baixa resolução espacial. Em suma, trata-se de um problema que abrange resolução e extensão. Assim, define-se o NGDR por meio da expressão,

$$NGDR = \frac{ND}{GD},$$

em que ND , é o deslocamento líquido (*net displacement*) que é a soma de todos os segmentos de trajetória. Já o deslocamento bruto (*gross displacement*) GD , constitui a distância entre o ponto inicial e final do deslocamento total. Um esboço da maneira como é calculado o NGDR é mostrado na figura 4.7.

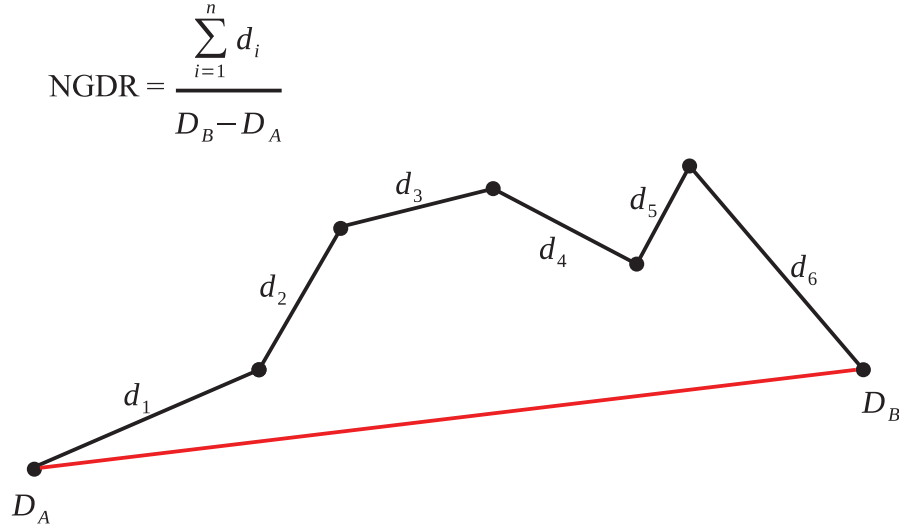


Figura 4.7 – Esboço descritivo para o cálculo do NGDR. O deslocamento líquido é a soma de todos os segmentos de trajetórias (representados pela cor preta). A distância entre o ponto inicial e final da trajetória expressa o deslocamento bruto (linha em vermelho). A medida do NGDR é a razão entre as duas distâncias, calculada em um determinado intervalo de tempo.

Desse modo, o NGDR define uma medida do grau de linearidade de uma trajetória. À medida em que o deslocamento líquido, que é a soma das distâncias euclidianas totais percorridas pelo organismo, se torna mais próxima do valor do deslocamento bruto, mais linear é a trajetória do organismo. Do contrário, quanto menor o valor do deslocamento líquido em relação ao bruto, mais sinuosa é a trajetória. Em suma, valores de NGDR próximos de 1, caracterizam trajetórias lineares e valores próximo de 0, caracterizam trajetórias sinuosas.

Como a maioria das métricas, o NGDR apresenta dependência de escala, isto é, os valores mudam dependendo da escala espacial ou temporal com que são medidas. Para

tornar as medidas do NGDR invariantes por escala de tempo foi calculado sobre os dados experimentais das trajetórias, a duração mínima do segmento de trajetória a partir do qual o valor do NGDR estabiliza.

Na figura 4.8, cada ponto representa o segmento de trajetória de uma associação, à qual foi calculado o valor do NGDR em função do número de quadros (*frames*). Vale ressaltar que as trajetórias foram obtidas a uma taxa de 20 quadros por segundo. A figura 4.8, compara as três trajetórias mais representativas observadas experimentalmente, que são: a trajetória retilínea, curvilínea e helicoidal. Os pontos em preto indicam vinte segmentos para os quais a associação realizou uma trajetória do tipo retilínea. Os pontos em cinza exibem os valores do NGDR para os segmentos de trajetórias nos quais a associação exibiu uma trajetória mais sinuosa (curvilínea ou helicoidal).

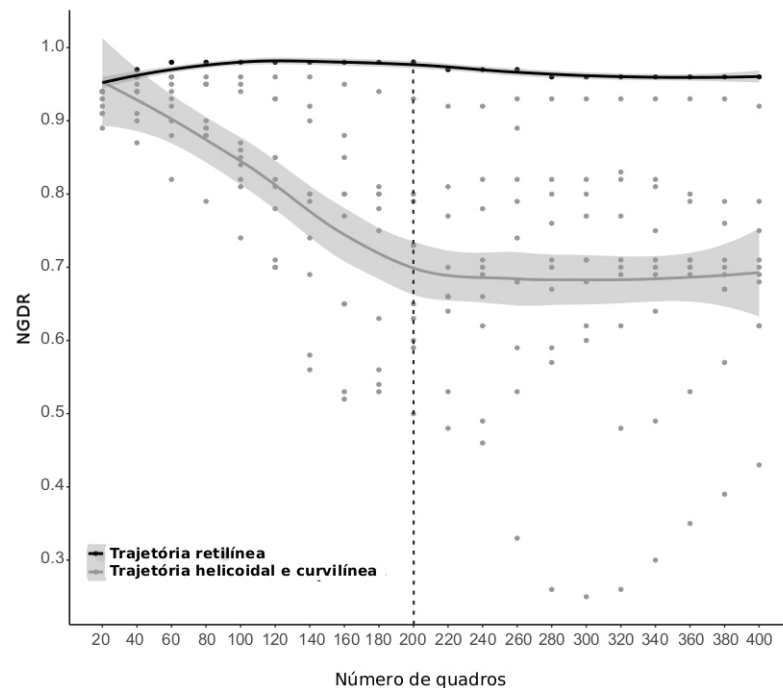


Figura 4.8 – Cálculo do NGDR em função do número de quadros obtida experimentalmente. Cada vinte quadros equivale a um segundo de gravação. Os pontos na figura representam os segmentos de trajetória de diferentes associações *Chaetoceros*-*Vorticellass*. Os pontos em preto indicam as associações que descreveram segmentos de trajetórias retilíneas e a curva em preto (e cinza) corresponde à aplicação de uma regressão local para mostrar a tendência na estabilidade do NGDR. Os pontos em cinza caracterizam os segmentos de trajetória curvilínea e helicoidal. A região sombreada em torno da curva em cinza representa a margem de erro da regressão local. A linha tracejada vertical indica a posição em que os valores de NGDR começaram a apresentar uma tendência estacionária. Para valores maiores do que 200 quadros o valor do NGDR, para as três diferentes trajetórias, mantém-se estável.

As curvas em preto e em cinza, representam o emprego de uma regressão local para observar a tendência na estabilidade do NGDR. Dessa forma, a comparação apresentada na figura 4.8, mostra que os valores do NDGR estabilizam a partir de duzentos quadros, isto é,

dez segundos de duração, para os três diferentes tipos de trajetória. Uma vez obtida a duração dos intervalos de tempo em que os valores de NGDR estabilizam, calculamos a velocidade mediana instantânea e comparamos os valores com aqueles obtidos experimentalmente.

O cálculo da velocidade mediana consiste em tomar uma sequência ordenada (crescente ou decrescente) de valores de velocidade instantânea, dentro de um dado intervalo de tempo, e retirar o valor central da sequência. Isto, para o caso em que a sequência é composta por um número ímpar de elementos. No caso de um conjunto de valores com uma quantidade par de elementos, é tomado a média entre os dois valores centrais da sequência.

Por exemplo, na figura 4.8, a cada duzentos quadros é calculado o valor da velocidade instantânea. Nesta sequência de duzentos valores, que são colocados em ordem crescente, é considerado o valor médio dos dois termos centrais da sequência. O uso da velocidade mediana é útil quando os valores da velocidade instantânea não seguem uma distribuição simétrica de probabilidades, como, por exemplo, uma distribuição normal, em que, nesse caso, convém observar, o valor da mediana coincide com o valor médio.

Na simulação computacional, o cálculo da velocidade mediana foi realizado considerando os valores de velocidade instantânea calculados a cada iteração. A cada conjunto de iterações, respeitando o número de quadros no caso experimental (figura 4.8), os valores da velocidade instantânea são calculados, ordenados de forma crescente e, então, é extraído o valor central desta sequência. Apresentamos, na figura 4.9, a comparação entre a distribuição da velocidade mediana instantânea em função do NGDR, obtida experimentalmente, com a obtida por meio da simulação computacional.

A figura 4.9 (itens **A-D**) é o resultado de uma análise de clusters para os segmentos de trajetória obtidas experimentalmente e mostra a distribuição de velocidades mediana instantânea em função do NGDR. A análise de clusters dos segmentos de trajetória exibiu, então, três diferentes tipos de trajetórias. Uma trajetória helicoidal (H), caracterizada por segmentos de caminhos de alta sinuosidade ($\text{NGDR} = 0,63 \pm 0,18$) e baixa velocidade ($0,36 \pm 0,40 \text{ mm/s}$).

Trajetórias compostas por segmentos curvos e retilíneos (CR), à qual a sinuosidade é menor em comparação a helicoidal ($\text{NGDR} = 0,91 \pm 0,11$) e a velocidade é ligeiramente maior ($0,40 \pm 0,22 \text{ mm/s}$) e trajetórias rápidas e retilíneas (RR), que são caracterizadas por terem alta velocidade ($1,09 \pm 0,38 \text{ mm/s}$), em comparação às outras trajetórias, e baixa sinuosidade ($\text{NGDR} = 0,96 \pm 0,38$).

No item **A** da figura 4.9, vemos que em um ambiente sem nenhuma concentração de alimento, a associação *Chaetoceros-Vorticellass* adota trajetórias rápidas e retilíneas, o que sugere que a associação utiliza esse tipo trajetória para percorrer grandes distâncias do ambiente e encontrar, desse modo, regiões com alimentos.

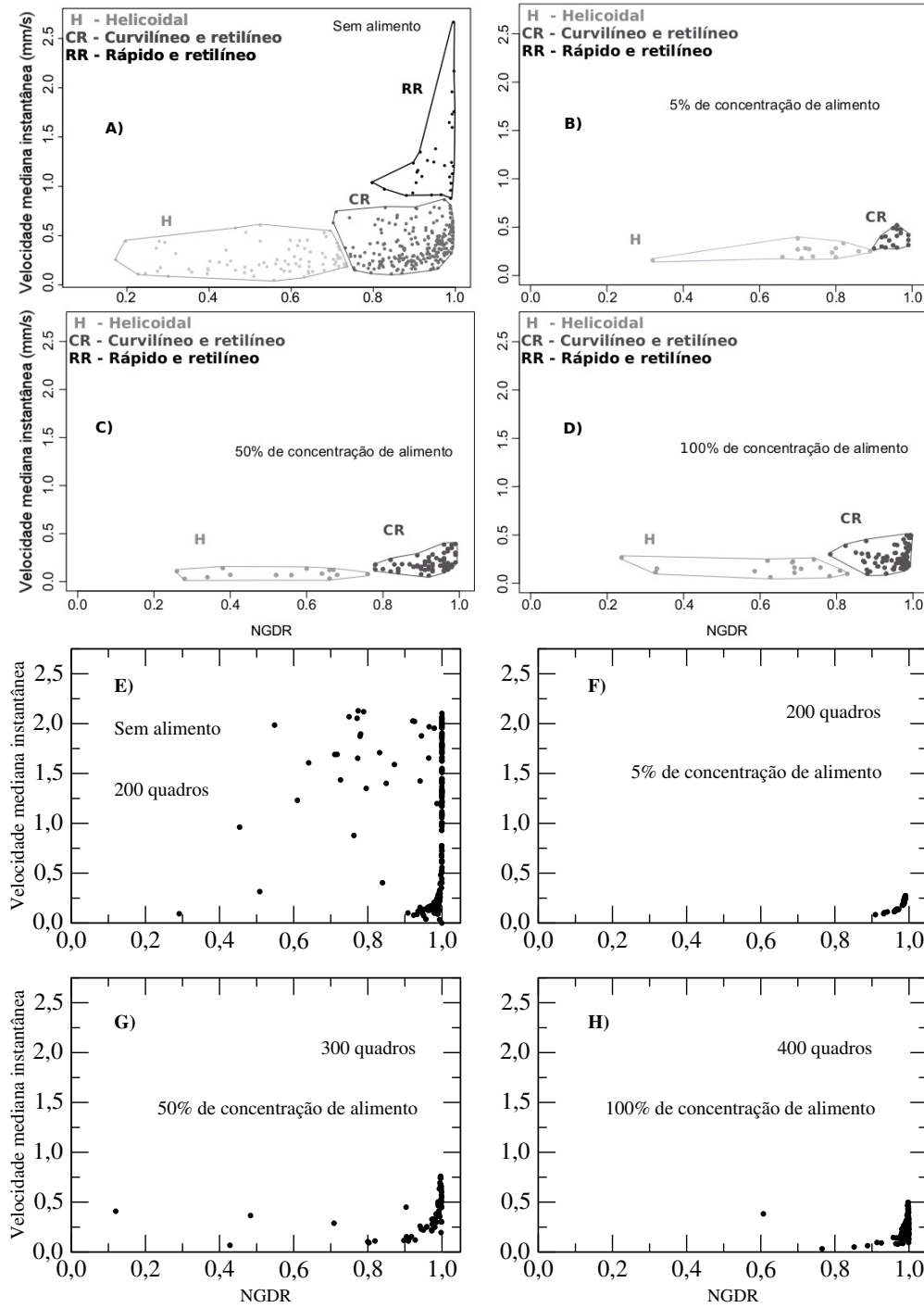


Figura 4.9 – Comparação entre dados experimentais (itens **A-D**), e dados obtidos via simulação computacional (itens **E-H**), para a distribuição de velocidade mediana instantânea em função do NGDR. Em ambiente sem nenhuma concentração de alimento (item **A**), a associação adapta seu movimento para executar uma trajetória mais rápida e retilínea percorrendo, assim, mais regiões a procura de alimento. À medida em que a concentração de alimento aumenta, itens **C-D** o padrão **RR** desaparece e a associação executa uma trajetória mais curvilínea e retilínea (item **D**). Os resultados da simulação computacional mostram, de forma qualitativa, a mesma tendência na distribuição das velocidades medianas instantâneas, exceto para a trajetória helicoidal.

À medida em que aumenta a concentração de alimento no ambiente, a trajetória

rápida e retilínea não é mais observada (itens **B-D**), e a trajetória do tipo curvilínea e retilínea (CR) é mais pronunciada nos ambientes com média (50%) e alta (100%) concentração de alimento. A análise de clusters dos dados experimentais foi realizada considerando segmentos de trajetórias de duração de duzentos quadros.

Nos itens **E-H**, mostramos a análise de clusters das trajetórias resultantes das simulações computacionais. Cada ponto corresponde a um segmento de trajetória da simulação computacional calculada dentro de um determinado conjunto de iterações, semelhante aos quadros nas medidas experimentais. Por exemplo, no item **E**, a velocidade mediana instantânea e a medida do NGDR foram calculadas a cada duzentas iterações. Ainda nesse item, é possível observar, de forma qualitativa, a mesma tendência na distribuição de velocidades, isto é, há segmentos de trajetórias em que a associação adota uma trajetória rápida e retilínea, evidenciando a procura por regiões com maior concentração de alimento.

A análise de clusters obtida por meio da simulação computacional mostra, também, que à medida em que a concentração de alimentos aumenta no ambiente, trajetórias do tipo rápida e retilínea, dão lugar à trajetórias do tipo curvilínea e retilínea, conforme pode ser visto nos itens **F-H**. Na simulação computacional, a análise de cluster foi realizada com diferentes intervalos de iterações. Conforme observamos na figura 4.8, para valores no intervalo entre duzentos e quatrocentos quadros, os valores do NGDR tornam-se estáveis para os três diferentes tipos de trajetórias. Isso nos possibilita utilizar diferentes intervalos de iterações para obtermos uma análise qualitativa da distribuição de velocidades mais condizente com os dados experimentais.

Comparando os dados da análise de clusters, obtidos experimental, com os dados obtidos por meio da simulação computacional, observamos que o número de trajetórias do tipo helicoidal é consideravelmente menor, na simulação computacional. Independente da concentração de alimento no ambiente. Isto se deve ao fato da análise de cluster, obtida experimentalmente, ser realizada em um ambiente 3D, enquanto que na simulação computacional, a análise é realizada em um ambiente bidimensional. Conforme veremos a seguir, por meio da análise da trajetória do centro geométrico, na simulação computacional, e do centroide da associação, nos dados experimentais, a dimensionalidade do sistema dificulta distinguir entre trajetórias helicoidais e trajetórias curvilíneas.

Comparamos as trajetórias do centroide da associação *Chaetoceros*-*Vorticellass*, obtidas experimentalmente, com as trajetórias do centro geométrico da associação obtidas na simulação computacional. As comparações são mostradas na figura 4.10. Em cada ambiente foram realizadas simulações com 16000 iterações. As simulações computacionais foram realizadas em um ambiente de tamanho 200×200 . Destacamos na figura, trechos das trajetórias e as comparamos com as trajetórias obtidas experimentalmente.

Embora as caixas destacadas na figura 4.10, mostrem uma boa concordância entre as trajetórias obtidas experimentalmente e as obtidas por meio da simulação, é difícil distinguir entre trajetórias de tipo helicoidal e de tipo curvilínea. Isso porque uma trajetória helicoidal

é bem caracterizada em um ambiente em três dimensões. A projeção de uma trajetória helicoidal, em um plano, pode ser considerada uma trajetória curvilínea, alternada com espécies de cúspides, dependendo do plano em que se projeta a trajetória. Que é o padrão observado, por exemplo, na caixa destacada da trajetória em ambiente sem alimento, na figura 4.10.

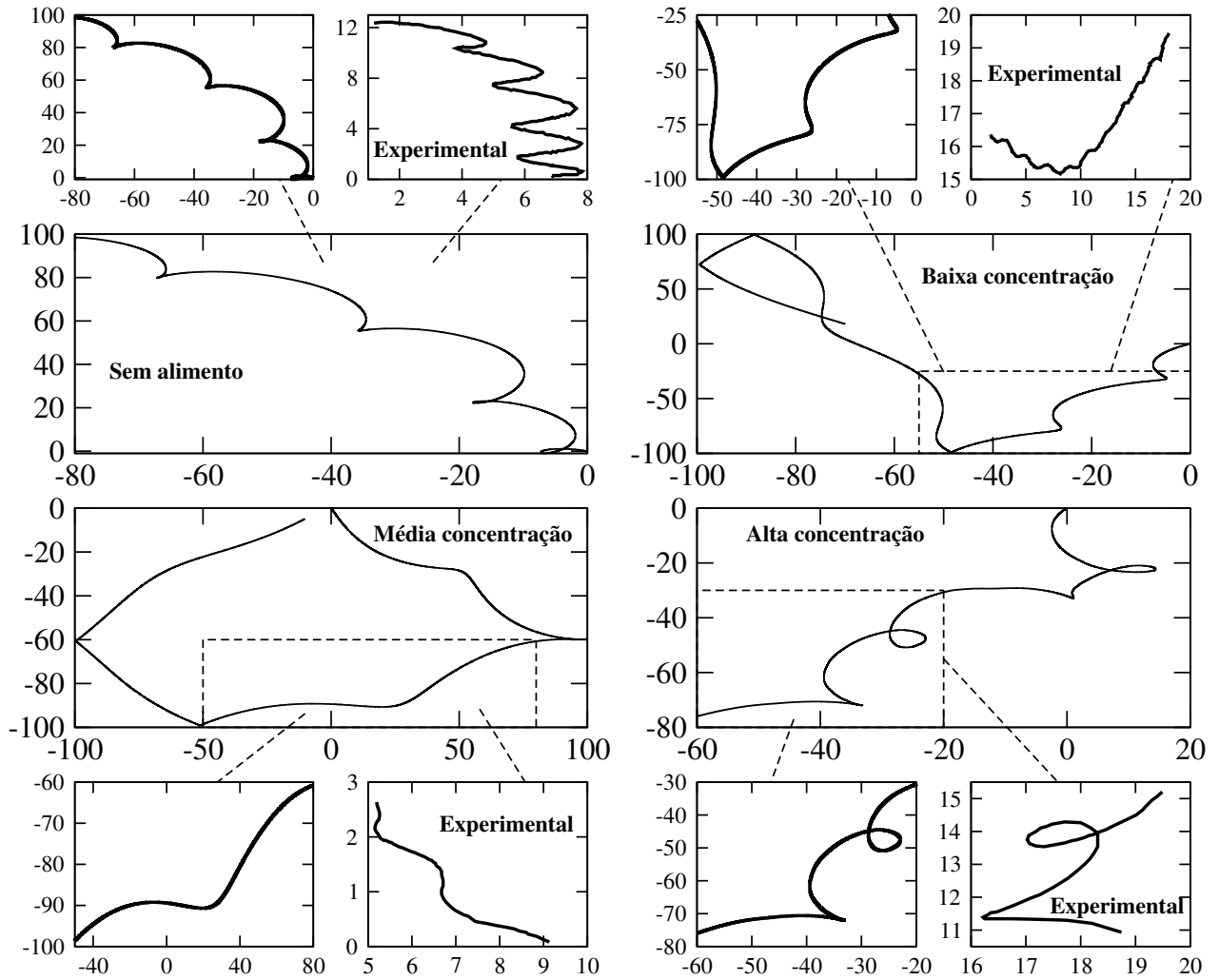


Figura 4.10 – Simulação computacional das trajetórias da associação *Chaetoceros*-*Vorticella* em ambientes com diferentes concentrações de partículas. A trajetória tem início na origem do sistema de coordenadas e a escala indica os valores dos pontos da trajetória no plano xy . Após um número de 16000 iterações, comparamos trechos das trajetórias das simulações computacionais com as trajetórias obtidas experimentalmente. A comparação é mostrada pelas caixas destacadas. Desconsiderando os efeitos da condição de contorno, as trajetórias obtidas por meio da simulação computacional mostram boa concordância em relação às obtidas experimentalmente.

Um outro exemplo, pode ser observado na trajetória descrita no ambiente com alta concentração de alimento. Pode-se observar uma trajetória curvilínea seguida de uma cúspide, aproximadamente no ponto $(-30, -70)$, e uma revolução aproximadamente na

altura do ponto $(-25, -50)$. O primeiro trecho da trajetória pode ser entendido como uma trajetória helicoidal projetada no plano xz , enquanto o segundo trecho pode ser interpretado como uma trajetória helicoidal projetada no plano xy . Mas, ambas, também, podem ser observadas como trajetórias curvilíneas no plano xy . Essa é a razão pela qual o cálculo do NGDR, na simulação computacional, “favorece” trajetórias curvilíneas mais do que helicoidais.

De acordo com as regras do modelo que desenvolvemos e os resultados das simulações apresentadas até aqui, geramos animações para descrever, de forma qualitativa, o movimento da associação *Chaetoceros*-*Vorticell*ass. As animações, realizadas em ambientes com diferentes concentrações de partículas, foram comparadas com os vídeos obtidos em ambientes com diferentes concentrações de alimentos. Estas comparações podem ser vistas em um *site*⁵, ou por meio de um código QR⁶.

As animações foram geradas por meio do software Gnuplot versão 4.6. Em um total de quatrocentas iterações, em que cada iteração corresponde a um instante de tempo igual a $0,001s$, as animações foram geradas com um *delay* de cinco segundos. Isso resultou em vídeos de vinte segundos de duração, em que a taxa de “filmagem” corresponde a mesma taxa dos vídeos com os dados experimentais, isto é, vinte quadros por segundo (20fps).

Comparamos nas animações 1 e 2, o movimento da associação de duas formas. Ambas em um ambiente sem alimento. A primeira, de uma forma global, comparando a maneira como a associação se movimenta e a sua velocidade em um ambiente sem alimento. A segunda, de uma forma local, analisando o comportamento dos zooides em relação a diatomácea. Conforme é possível ver nos vídeos que constituem os dados experimentais, a retração dos pedúnculos dos zooides transmite uma quantidade de movimento à diatomácea que resulta, por sua vez, em um ângulo de giro que causa a mudança na direção do movimento da associação *Chaetoceros*-*Vorticell*as.

Podemos observar um bom acordo entre a simulação computacional e o vídeo experimental, para os dois casos. De uma maneira global, em ambientes sem alimento a associação tende a exibir um padrão de movimento mais retilíneo e com velocidades mais altas em relação a ambientes com alguma concentração de alimento. Consequentemente, velocidades mais altas fazem com que a associação percorra mais regiões do ambiente, a procura de regiões com maior concentração de alimentos.

Além disso, em ambientes com nenhuma (ou baixa) concentração de alimento, cada *Vorticella* retraí seu pedúnculo com uma frequência maior. É o que podemos observar na animação 2. Observando localmente o movimento da associação *Chaetoceros*-*Vorticell*as,

⁵ https://drive.google.com/drive/u/0/folders/10FKKQa2_ZZXC215HWPV7Q1cfANfoAaFC



vemos, por meio do vídeo experimental, que o número de retrações é alto, embora é possível ver que nem toda retração do pedúnculo provoca um ângulo de giro na associação.

A medida em que a concentração de alimentos no ambiente aumenta, a velocidade da colônia diminui. Vemos, por meio dos vídeos experimentais 3 e 4, que a trajetória assume um padrão mais curvilíneo e retilíneo (CR). Um fator que contribui para esse padrão de movimento é a diminuição do número de retrações dos pedúnculos das *Vorticellas* associadas à diatomácea *Chaetoceros coarctatus*. Em ambientes com alta concentração de alimentos é possível observar uma frequência menor na retração dos pedúnculos. Consequentemente, ocorrem menos incrementos no ângulo de giro e isso faz com que a velocidade da associação diminua.

As animações três e quatro, decorrentes das simulações computacionais, descrevem qualitativamente bem as características desse fato. Nas simulações, consideramos que a retração de cada pedúnculo só ocorre na iteração em que não passa nenhuma partícula pelo raio de visão da *Vorticella*. Assim, em ambientes com média e alta concentração de alimentos, há menos retrações dos pedúnculos do que em ambientes com baixa densidade de alimento.

Tratamos de simular, também, o caso particular em que a associação é colocada em um ambiente preparado, que contém uma faixa estreita de alimento (animação 6). Podemos ver, no vídeo 6, que a colônia não ultrapassa os limites demarcados pela faixa estreita de alimento. Com o intuito de observar esta situação, simulamos o ambiente com um total de $N = 1000$. Porém, distribuídas de forma heterogênea ao longo do ambiente. Dividimos o ambiente em três partes iguais, distribuindo um número de 100 partículas na parte superior e inferior do ambiente, e colocamos uma quantidade de 800 partículas na região central do ambiente, simulando a faixa estreita de alimento.

Conforme podemos observar na animação de número sete, a associação *Chaetoceros-Vorticellas* realiza o mesmo comportamento mostrado no vídeo 6, evidenciando que a nossa premissa descreve, qualitativamente, muito bem o movimento da colônia. Podemos observar, por meio da animação de número 6, que, no momento em que a associação chega na interface entre os dois meios, com poucas e muitas partículas, os ciliados “escolhem” permanecer no ambiente com o maior número de partículas e ajustam o seu movimento para ficarem nesta região durante todo o período de duração da simulação computacional.

4.5 Conclusões e Perspectivas Futuras

Apresentamos neste capítulo um método para modelar e simular computacionalmente a motilidade da associação *Chaetoceros-Vorticellas*. A motilidade da associação foi modelada de acordo com as regras de um mapa estocástico bidimensional de tempo discreto. A simulação computacional foi baseada em uma premissa básica: se o número de partículas por unidade de área, em cada instante de tempo, for menor do que $N_{ref} = 1$, a *Vorticella*

sp. contrai seu pedúnculo na direção da cadeia de diatomácea, transmitindo um impulso à diatomácea e produzindo um ângulo de giro que faz com que a colônia mude a direção do seu movimento, incrementando a velocidade da colônia.

Comparando as análises de clusters dos segmentos de trajetórias obtidas por meio das simulações computacionais, com as obtidas experimentalmente, vemos a mesma tendência nas distribuições das velocidades para ambientes com diferentes concentrações de alimentos. Isso é um forte indício de que o comportamento de retração dos pedúnculos é um fator relevante no movimento da associação.

Outra análise quantitativa que mostrou a relevância da contração do pedúnculo de cada *Vorticella* no movimento geral da associação foram as comparações entre a trajetória do centro geométrico da associação, no caso da simulação computacional, e a trajetória do centroide, no caso experimental, para ambientes com diferentes concentrações de alimentos. Trechos das trajetórias obtidas pelas simulações computacionais guardam, com exceção da escala, boa concordância com os dados experimentais.

A questão da dimensionalidade do ambiente da simulação computacional dificultou as comparações com os dados experimentais. Sobretudo na comparação entre os valores da distribuição de velocidades mediana e do NGDR. Em um ambiente bidimensional, para os casos em que a associação exibe uma trajetória helicoidal, essas podem ser consideradas, também, trajetória curvilíneas. O que não ocorre no ambiente tridimensional em que os dados experimentais foram obtidos.

Realizamos simulações computacionais do movimento da associação em ambientes com diferentes números de partículas com a finalidade de descrever a motilidade da associação em ambientes reais com diferentes concentrações de alimentos. Observamos que, em ambientes com baixa densidade de partículas, o número de contrações dos pedúnculos é maior e, conseqüentemente, há um aumento na velocidade da associação, fazendo com esta percorra maiores extensões do ambiente.

À medida que aumentamos o número de partículas no ambiente, percebemos uma mudança no comportamento da associação. Observamos que o número de contrações dos pedúnculos diminui e, por conseqüência, a sua velocidade, evidenciando uma adequação da *Vorticella* à região com o maior número de partículas.

O caso particular em que foi colocada uma faixa estreita de partículas foi simulado computacionalmente. A associação permanece durante todo o tempo da simulação dentro da faixa estreita que contém o maior número de partículas do ambiente. Este caso particular, juntamente com os demais casos estudados neste capítulo, corroboram a premissa de que a associação ajusta seu movimento para que todas a colônia desfrutem de uma região abundante em alimento.

Como perspectiva para trabalhos futuros, pretendemos estender a dimensão do ambiente computacional para um ambiente tridimensional para que o modelo computacional

possa descrever melhor trajetórias helicoidais. Além disso, desejamos implementar os efeitos das microcorrentes de alimentação geradas pelas Vorticellas. Nosso propósito é entender melhor a relação entre as retrações do pedúnculos e as microcorrentes de alimentação no movimento da associação Chaetoceros-Vorticellas.

ESTRATÉGIAS DE LÉVY COMBINADAS

Nesse capítulo discorreremos sobre o uso de estratégias de Lévy combinadas. Ao invés do forrageador realizar buscas no ambiente executando voos de Lévy, o caminhante executa a busca combinando duas estratégias de Lévy que são representadas por uma soma de distribuições de probabilidade. Um peso estatístico ω é atribuído à soma das distribuições, favorecendo uma determinada estratégia de busca. Empregamos o método da inversão para gerar o comprimento dos passos dados pelo forrageador na estratégia de Lévy combinada, e para a estratégia de busca $\mu = 1,5$. Aplicamos o teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov para comparar os dois conjuntos de passos gerados pelo método de inversão, mostrando que para determinado ω , a estratégia de busca combinada descreve muito bem voos de Lévy com estratégia de busca $\mu = 1,5$.

5.1 Introdução

A principal razão para o movimento dos organismos na natureza é a necessidade biológica de interagir com outros organismos [4]. Animais, por exemplo, se movem na natureza com o fim de encontrarem alimento e parceiros para reprodução. Interação entre organismos, pode significar também a necessidade de escapar de seus predadores. Nesse sentido, os detalhes do movimento podem depender de muito fatores, como por exemplo o clima, temperatura ou a densidade local de outros organismos. Nesse contexto surge uma importante pergunta: qual é a melhor estratégia de busca para explorar o ambiente?

Muitos trabalhos tem sido realizado, no sentido de tornar mais clara a resposta desta pergunta. Dentre estes trabalhos, muitos propõe uma estratégia de busca dual onde o forrageador, sob certas condições, alterna sua estratégia de busca. Modelos que levam em conta a alternância das estratégias de busca são conhecidos, na literatura, como busca aleatória combinada¹. Em modelos de busca aleatória combinada, a estratégia utilizada pelo

¹ *Composite random searches*

forrageador é descrita por uma combinação de buscas aleatórias simples ² [136].

Isso faz com que o tamanho dos passos dados pelos organismos sejam intercalados entre passos curtos, que ocorrem com mais frequência, e passos de tamanhos mais longos, que ocorrem mais raramente [137]. Assim, a alternância entre passos curtos e longos, faz com que o padrão da trajetória do forrageador que executa uma estratégia do tipo, busca aleatória combinada, seja confundida com uma estratégia do tipo Lévy [136]. Os passos longos, descrevem a busca por ambientes que possuem provisões, enquanto que os passos curtos descrevem o movimento de organismos dentro do ambiente de busca.

Dessa forma, uma estratégia composta do tipo busca aleatória combinada, depende da capacidade do animal em diferenciar duas regiões distintas: uma região com provisões, e outra região com provisões escassas. Por outro lado, voos de Lévy não consideram tais habilidades, e podem ser usados para descrever estratégias de busca de organismos que possuem fraca interação com o ambiente [21]. Estudos realizados, observando o forrageamento combinado por duas estratégias de Lévy da larva *Drosophila melanogaster*, mostraram evidências de que a estratégia de busca adotada por este organismo tem caráter evolucionista, isto é, teriam “aprendido” por meio de seleção natural a explorar as distribuições das provisões em ambientes, mediante estratégias de Lévy combinadas [11].

No presente capítulo, apresentamos um estudo referente a estratégias de Lévy combinadas. A motivação para estudo é: o comportamento de duas espécies de pássaros, a *Calonectris borealis* nativa do norte do oceano Atlântico e a *C. diomedea* espécie nativa do mar mediterrâneo. Estudos recentes [138], mostraram que a distribuição do tipo lei de potência, que descreve o padrão de estratégias de Lévy, descreve melhor a duração dos voos e o intervalo de tempo entre os mergulhos destas aves, do que uma lei de potência exponencial truncada. Queremos propor uma forma mais geral que leva em conta duas possíveis estratégias utilizadas em forrageamento animal: a estratégia de busca $\mu = 1,1$ e $\mu = 2,0$. A razão de usarmos essas estratégias se deve ao fato de combinarmos duas estratégias de buscas bem conhecidas: uma que representa o regime balístico ($\mu = 1,1$), e portanto, percorre grandes distâncias e outra que otimiza a estratégia de busca ($\mu = 2,0$), necessária para encontrar recursos.

Para este fim, propomos uma distribuição de Lévy representada por uma soma de distribuições e associamos aos termos da soma um peso estatístico, dado pelo parâmetro ω . Comparamos a forma funcional da distribuição de probabilidade de Lévy combinada, com a distribuição de Lévy cuja estratégia de busca é $\mu = 1,5$. Para verificarmos que uma estratégia de Lévy, com uma estratégia de busca específica, pode ser representada por uma soma de estratégias de Lévy, aplicamos o método da inversão para obtermos, numericamente, os conjunto de dados que representam, o tamanho dos passos dados pelo forrageador que executa buscas, utilizando a distribuição de probabilidade combinada de Lévy, e a distribuição de Lévy com estratégia de busca $\mu = 1,5$. Uma vez obtido as

² Simple random searches

amostras que representam a distribuição dos passos dados por meio das duas distribuições de probabilidade, empregamos o teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov para verificarmos se as amostras pertencem a mesma população.

5.2 Resultados

Na seção 2.8 apresentamos o método da inversão. Este método é usado para gerar os passos de um caminhante aleatório que realiza buscas no ambiente, executando uma estratégia de Lévy. Agora, nessa seção, utilizando o método da inversão, mostramos os resultados que indicam que uma estratégia de Lévy pode ser descrita por uma conveniente soma de estratégias, dada pela Eq. 2.92. Iniciamos nossa análise, primeiramente investigando qual o melhor (ou os melhores) valor do parâmetro ω que melhor ajusta a Eq. 2.92 à distribuição de Lévy de referência, dada pela equação $P(\ell) = \beta \ell^{-1,5}$.

O parâmetro ω , além de normalizar a soma das distribuições de probabilidade, descreve também a probabilidade de, em um processo de busca, o buscador optar por uma ou outra estratégia. Em outras palavras, o parâmetro ω descreve a porcentagem com que a estratégia de busca é alternada, isto é, de todo o processo de busca realizado, qual foi a porcentagem utilizada da estratégia balística ($\mu = 1,1$), e qual foi a porcentagem utilizada da estratégia, $\mu = 2,0$, que otimiza a taxa de encontro de alvos em regiões com baixa densidade.

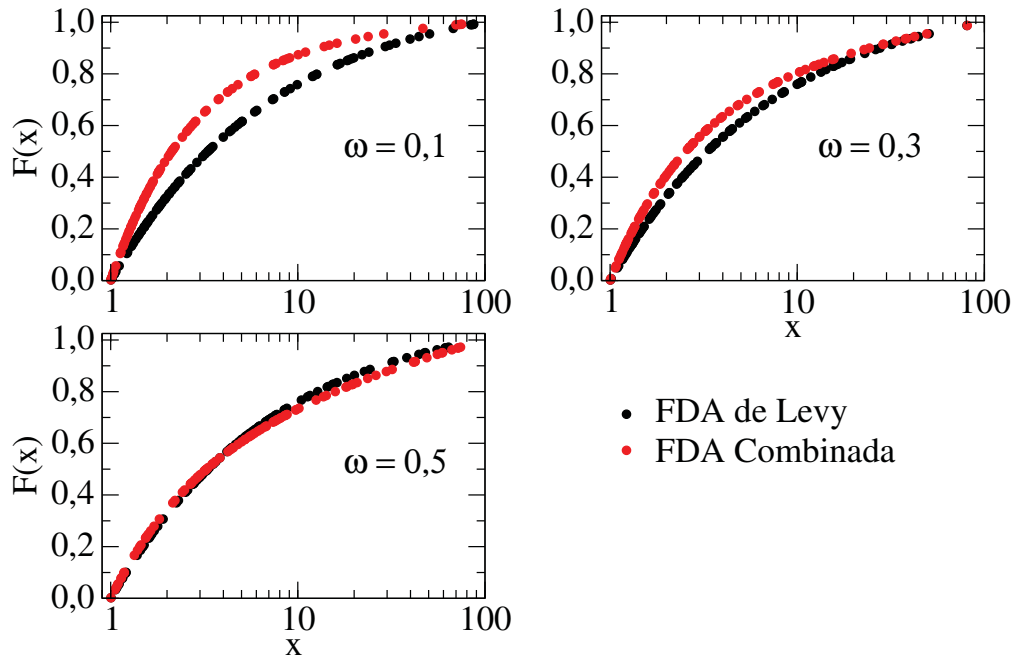


Figura 5.1 – Comparação entre a FDA de Lévy de referência (curva em preto), e a FDA da combinada (curva em vermelho) para três diferentes valores do parâmetro ω e $\ell_{máx} = 100$. A figura mostra que, à medida em que o parâmetro ω cresce, a região côncava da FDA da combinada se ajusta melhor a região côncava da FDA de Lévy.

As figuras 5.1 e 5.2 mostram as comparações entre as funções distribuição acumulada

de probabilidade (FDA) da distribuição de Lévy de referência (curva em preto), e da distribuição combinada de probabilidade (curva em vermelho) no intervalo $\omega \in [0,1; 0,9]$ e $\ell_{m\acute{a}x} = 100$. Vemos que, à medida que o valor de ω cresce, a curva que representa a FDA da distribuição combinada se ajusta melhor à FDA da distribuição de Lévy, em que o melhor valor que ajusta as duas distribuições acumulada de probabilidade ocorre em $\omega = 0,5$. Esse resultado evidencia que o espaço amostral que descreve a distribuição combinada pode pertencer a mesma população que caracteriza o espaço amostral da distribuição de Lévy de referência.

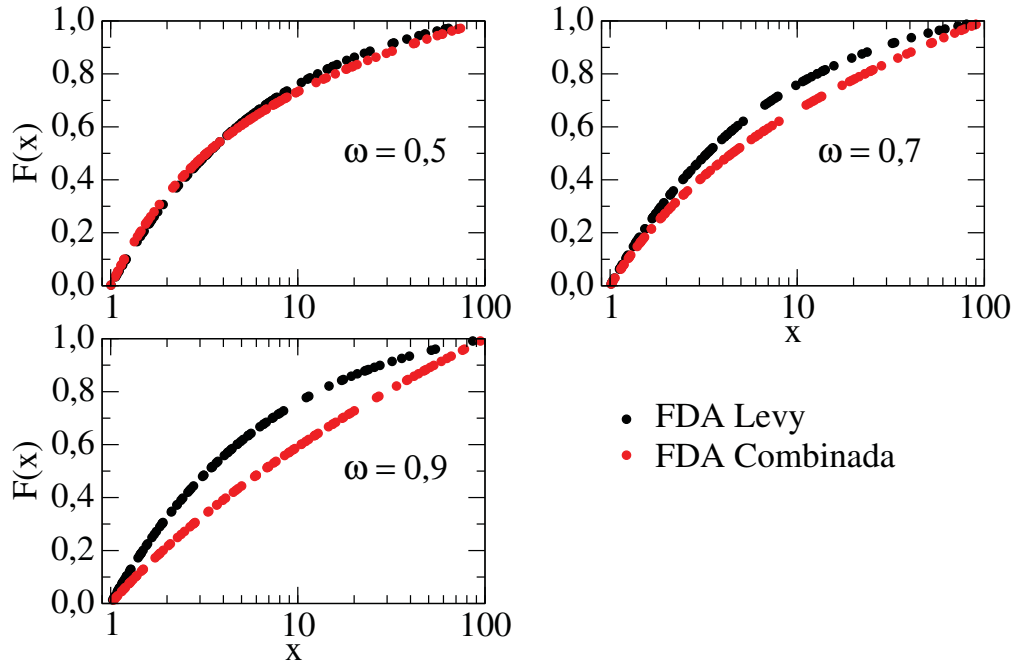


Figura 5.2 – Análise comparativa entre a forma funcional da distribuição de Lévy de referência (curva em preto) e a distribuição de Lévy combinada (curva em vermelho) para $\omega = 0,5, 0,7$ e $0,9$ e $\ell_{m\acute{a}x} = 100$. As caixas destacadas mostram que, à medida em que o parâmetro ω cresce, as funções $f(x)$ e $g(x)$ se desajustam para valores de $x \rightarrow 0$.

As análises das curvas também evidenciam que, o forrageador divide de maneira aproximadamente igual, as estratégias de busca entre a estratégia balística $\mu = 1,1$, e a estratégia que otimiza a eficiência de busca $\mu = 2,0$. Vale ressaltar que essa análise não descarta, obviamente, o caráter aleatório da variável independente e serve como uma primeira verificação para o melhor valor de ω que ajusta as duas distribuições.

Mostramos por meio da figura 5.3, a comparação entre a forma funcional da distribuição combinada, dada pela curva em preto, e a distribuição de probabilidade dada pela Eq. 2.92, para um valor de $\ell_{m\acute{a}x} = 10000$. A distribuição de probabilidade combinada é obtida numericamente por meio de um gerador de números aleatórios que sorteia valores para os tamanhos dos passos no intervalo $\in [1, \ell_{m\acute{a}x}]$ em que, $\ell_{m\acute{a}x} = 100, 1000$ e 10000 . A ideia aqui, é observar possíveis mudanças no comportamento da distribuição de probabilidade combinada por uma soma de duas distribuições, em relação a forma funcional da soma,

e também investigar a influência do parâmetro ω no ajuste entre as expressões devido à aleatoriedade das variáveis que descrevem a distribuição de probabilidade.

Assim, diferente da forma funcional da distribuição de Lévy combinada, a distribuição de probabilidade de Lévy combinada, leva em conta o caráter estocástico da busca realizada pelo forrageador. Podemos observar por meio da figura 5.3, que a distribuição de Lévy combinada, obtida numericamente, se ajusta muito bem à forma funcional da distribuição de Lévy para diferentes valores de $\ell_{máx}$.

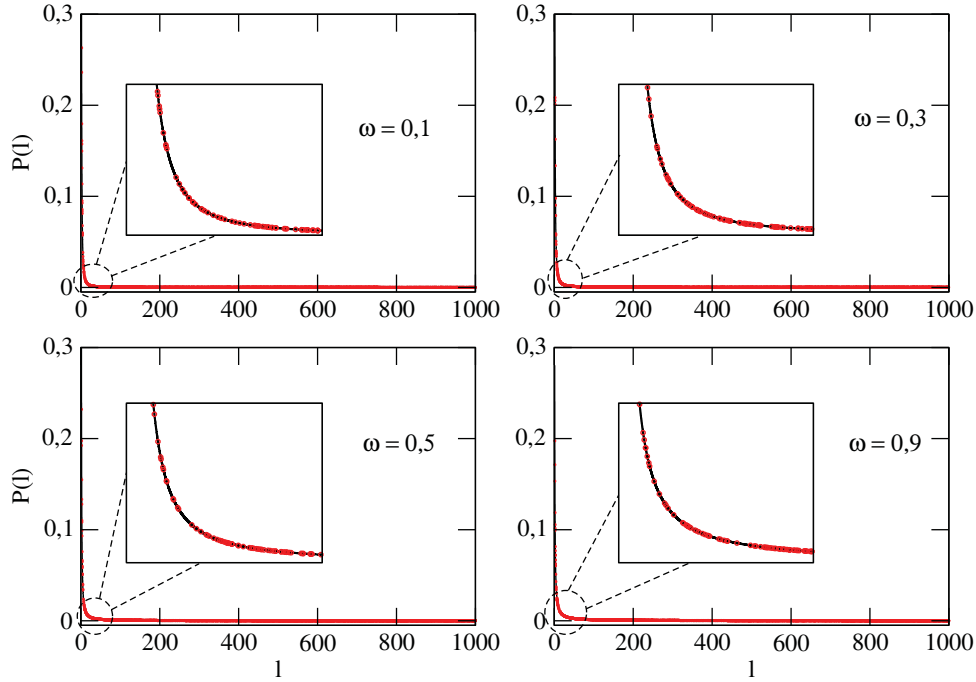


Figura 5.3 – Análise comparativa entre a distribuição de Lévy combinada (pontos em vermelho), obtida numericamente, e a forma funcional da distribuição combinada de Lévy (linha contínua preta) para $\ell_{máx} = 1000$. As caixas destacadas mostram que os dados obtidos numericamente se ajustam muito bem a forma funcional da distribuição combinada de Lévy para os quatro valores de ω .

Realizada a análise inicial para a dedução do parâmetro ω que melhor ajusta as duas distribuições, passaremos agora, ao problema de encontrar as soluções para a Eq. 2.94. Para obtermos o conjunto de valores que satisfazem a Eq. 2.94, desenvolvemos um código em linguagem Fortran 90 para encontrar os pontos de intersecção em que, o modulo da diferença entre a reta (dada por ℓ) e a curva (dada por $\ell^{0,9}$), sejam tão próximas quanto se queira, isto é,

$$\left| \ell - \frac{\beta_1 \ell^{0,9} + \beta_2}{\beta_1 + \beta_2 - F(\ell)} \right| \leq \epsilon, \quad (5.1)$$

onde $\epsilon \sim 10^{-5}$ e $F(\ell)$ é a função de distribuição acumulada que assume valores aleatórios no intervalo $\in [0, 1]$.

A cada iteração, num total de 100 iterações, variamos o tamanho do passo ℓ partindo de um valor mínimo $\ell_{\min} = 1$, até um valor máximo $\ell_{\max} = 100, 1000$ e 10000 . Para cada valor de ℓ , verificamos a intersecção entre a reta e a curva, dada pela Eq. 2.94. Dessa forma, obtemos uma amostra contendo 100 passos aleatórios para a distribuição de probabilidade que representa a estratégia de Lévy combinada. Procedemos de maneira idêntica, utilizando a Eq. 2.91, para obter o conjunto de passos para a distribuição de Lévy de referência.

Para cada valor do parâmetro ω , foram gerados espaços amostrais de acordo com a Eq. 2.94 e, então, realizado o teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov sobre o espaço amostral da distribuição de Lévy de referência para constatar se as duas amostras comparadas pertencem a mesma população. Realizamos o teste, comparando a distribuição de Lévy. Mostramos os valores para os D_{\max} , bem como para os p -valores, para vários os diferentes valores de ω , na tabela 5.1.

Os valores de D_{\max} , na tabela 5.1, descrevem as diferenças absolutas, dadas pela Eq. 2.79, das maiores distâncias entre as distribuições de frequência acumulada, empírica (distribuição de Lévy de referência $\mu = 1,5$) e a testada (distribuição de Lévy combinada) para os diferentes valores do parâmetro ω .

ω	D_{\max}	p -valor	ω	D_{\max}	p -valor	ω	D_{\max}	p -valor
0,1	0,198020	0,038111	0,1	0,227723	0,010626	0,1	0,227723	0,010626
0,2	0,148515	0,215277	0,2	0,198020	0,038111	0,2	0,148515	0,215277
0,3	0,158416	0,158499	0,3	0,138614	0,286386	0,3	0,158416	0,158499
0,4	0,089109	0,817460	0,4	0,079208	0,909304	0,4	0,108911	0,587034
0,5	0,069307	0,968530	0,5	0,118812	0,473993	0,5	0,168317	0,114357
0,6	0,079208	0,909304	0,6	0,108911	0,587034	0,6	0,168317	0,114370
0,7	0,128713	0,372788	0,7	0,207921	0,025395	0,7	0,217822	0,016590
0,8	0,198020	0,038111	0,8	0,247525	0,004107	0,8	0,326733	0,000042
0,9	0,326733	0,002749	0,9	0,326733	0,000042	0,9	0,356436	0,000005

(a) $\ell_{\max} = 100$
(b) $\ell_{\max} = 1000$
(c) $\ell_{\max} = 10000$

Tabela 5.1 – Conjunto de dados obtidos por meio do teste estatístico Kolmogorov-Smirnov para diferentes valores de ℓ_{\max} . Destacamos na tabela, os melhores valores que verificam o teste K-S. Para valores maiores de ℓ_{\max} (itens **b** e **c**), o valor do parâmetro ω diminui sensivelmente, evidenciando que o buscador divide 40% da sua busca executando uma estratégia de busca balística e os outros 60% da busca realizando uma estratégia de busca que otimiza o encontro de alvos.

Já o p -valor descreve o nível de significância do teste de hipótese, isto é, quanto maior o p -valor, maior a certeza que temos na hipótese que as amostras pertencem ao mesmo espaço amostral e consequentemente, descrevem o mesmo comportamento estatístico. Por outro lado, se o p -valor for menor do que o valor de risco, isto é $\alpha = 0,05$, rejeitamos

a hipótese de que as amostras pertençam a mesma população. É o que podemos observar para $\omega = 0,1$ e $0,9$, no caso em que $\ell_{máx} = 100$. Analisamos o comportamento de $D_{máx}$ e do p -valor em função do parâmetro ω para os diferentes valores de $\ell_{máx}$. Mostramos essa análise nas figuras 5.4 e 5.5.

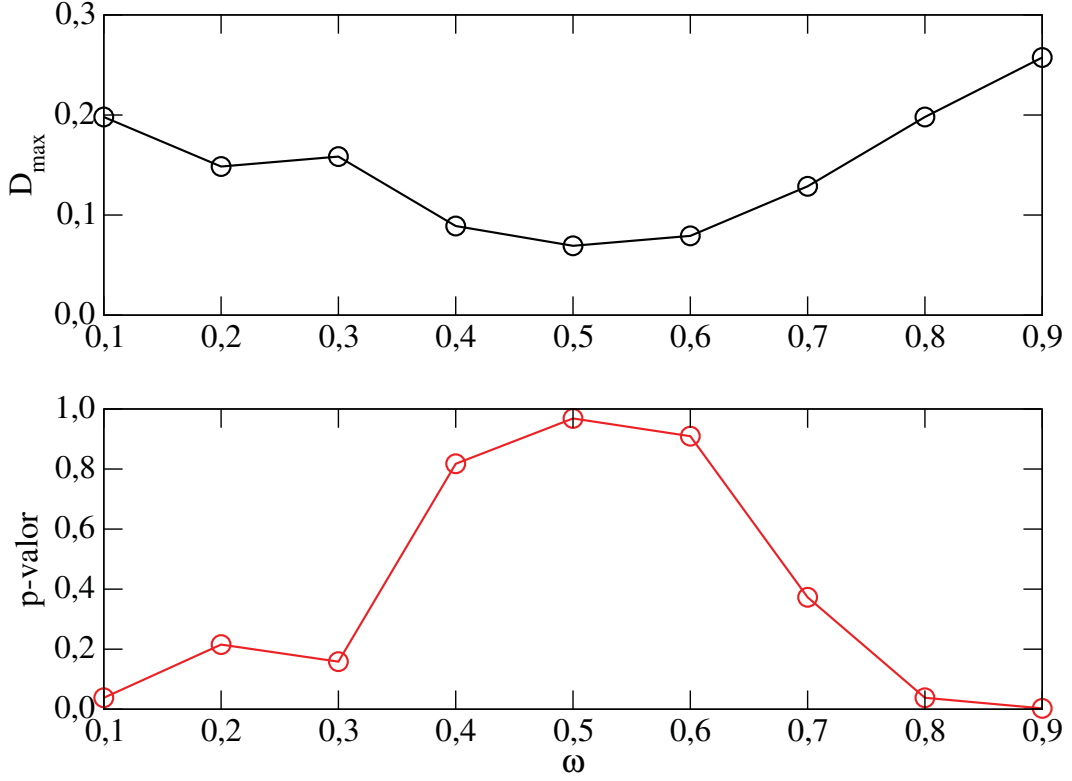


Figura 5.4 – Teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov realizado entre a distribuição de probabilidade de Lévy de referência e a distribuição de probabilidade combinada. O gráfico mostra a variação do valor de $D_{máx}$ e de p -valor para $\omega \in [0,1; 0,9]$ em que $\ell_{máx} = 100$. Para cada valor de ω , $D_{máx}$ caracteriza a maior distância entre as distribuições de probabilidade de referência e combinada. O menor valor de $D_{máx}$ ocorre para $\omega = 0,5$. Para esse valor de ω , o p -valor $\approx 1,0$, mostrando que as amostras tem aproximadamente 100% de certeza de pertencerem a mesma população.

Para $\ell_{máx} = 100$ conforme mostra a figura 5.4, observamos que o menor $D_{máx}$ está associado a $\omega = 0,5$ mostrando que, além da distribuição de probabilidade combinada descrever muito bem a estratégia de busca para $\mu = 1,5$, mostra também, que o forrageador alterna 50% da sua estratégia de busca entre o regime balístico e 50% da sua estratégia para o regime que otimiza a eficiência de busca. O valor de $\ell_{máx}$, além de descrever o tamanho máximo que o forrageador pode executar e o valor em que a distribuição de Lévy é truncada, descreve também, o tamanho do ambiente onde o forrageador se encontra.

Isso significa que o ajuste entre a distribuição de probabilidade de referência e a distribuição de probabilidade combinada, por meio do parâmetro ω , dependerá do valor de $\ell_{máx}$. Mostramos essa característica por meio dos gráficos da figura 5.5.

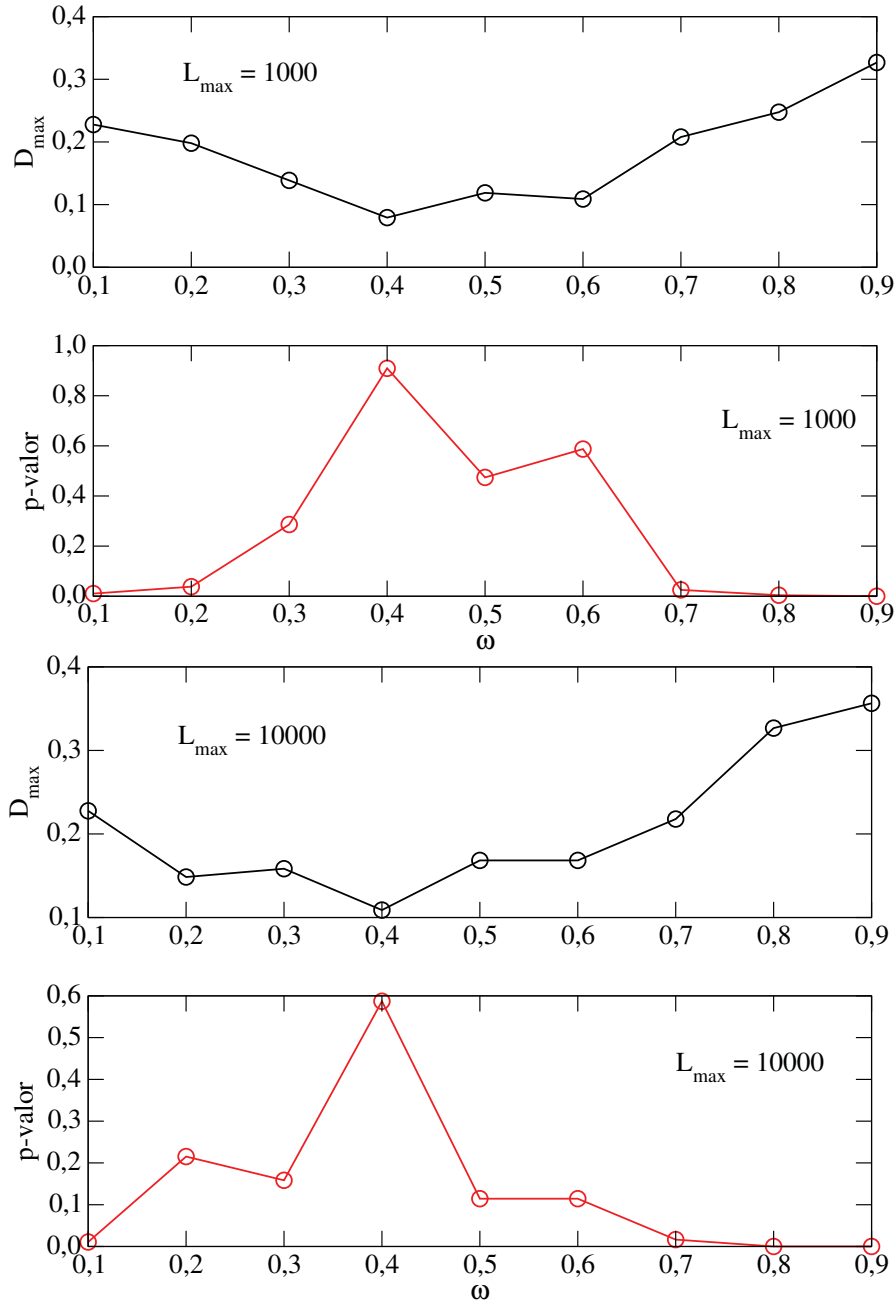


Figura 5.5 – Comparação do valor de D_{\max} e do p -valor para $\ell_{\max} = 1000$ e 10000 como função do parâmetro ω . Vemos que o menor D_{\max} ocorre para $\omega = 0,4$. É possível observar que o valor de D_{\max} para $\ell_{\max} = 10000$, é menor do que para $\ell_{\max} = 1000$ evidenciando a influência do tamanho do ambiente na estratégia de busca.

Podemos notar, na figura 5.5, que o valor de D_{\max} tanto para $\ell_{\max} = 1000$, quanto para $\ell_{\max} = 10000$, ocorre para $\omega = 0,4$. No entanto, para $\ell_{\max} = 10000$ o valor de D_{\max} é menor do que o caso em que $\ell_{\max} = 1000$. Observamos, por sua vez, que o p -valor é maior para $\ell_{\max} = 1000$ (aproximadamente 90%) do que para $\ell_{\max} = 10000$. Isso significa que para valores maiores de ℓ_{\max} , a estratégia de Lévy combinada descreve muito melhor a estratégia de busca de Lévy $\mu = 1,5$. Além de podermos concluir que, para valores maiores

de ℓ_{max} , o forrageamento é 40% balístico e 60% para otimizar a eficiência de busca.

5.3 Influência de Erros Associados à Medidas Experimentais

Todo ato de medir tem como objetivo determinar o valor de uma grandeza específica. Assim, uma medição começa pela especificação apropriada da grandeza, considerada no formalismo da Teoria do erro como, mensurando [139]. Exemplos de mensurando são: a temperatura de um determinado sistema, o tamanho dos passos dado por um forrageador etc. Além disso, é preciso especificar, também, o método de medição, que é caracterizado por uma sequência lógica de operações usada na execução da medição, e o procedimento de medição que é caracterizado pelo conjunto operações propriamente ditas. Nesse contexto surgem associadas aos mensurados, incertezas e erros.

De modo geral, o erro é definido como a diferença entre o valor verdadeiro de um mensurando e o resultado de uma medição. Em termos matemáticos, se y_v é o valor verdadeiro do mensurando e y é o resultado da medição, o erro é definido como, $\eta = y_v - y$. Como o valor verdadeiro de um mensurando é uma quantidade desconhecida, o erro é, também, uma quantidade desconhecida. Convém observar que a definição de erro é diferente do conceito de incerteza de uma medida. O método e o procedimento de medição tem por objetivo fornecer o melhor valor possível ao mensurando, que é aquele que melhor se aproxima do valor verdadeiro. Em suma, a incerteza associada a uma medida é definida como a indicação do quanto o melhor valor pode diferir do valor verdadeiro do mensurando.

Os erros podem ser dispostos em duas classes conforme a sua origem: erros aleatórios e erros sistemáticos. Os erros aleatórios, também chamados frequentemente de erros acidentais podem ser causados pela imperícia do operador no uso de um instrumento de medida, variação na capacidade de avaliação (número de medidas efetuadas, e até mesmo cansaço!), erro na avaliação da menor divisão da escala etc. Já os erros sistemáticos são erros associados às limitações nos aparelhos de medidas, como escala inadequada à medida ou erros na calibração do instrumento de medida. Podem também ser causados limitações nas técnicas utilizadas (posicionamento incorreto e contínuo do instrumento de medida) ou, também, ao próprio operador.

Com o intuito de estudar a influência de erros e incertezas, que são inerentes aos dados experimentais, adicionamos ruídos aleatórios, de forma sistemática, às variáveis aleatórias geradas por meio do método da transformada inversa. A ideia principal é estudar qual é a influência do erro associado à medida, quando se é preciso determinar se um conjunto de variáveis aleatórias pertence a uma ou a outra determinada distribuição de probabilidades. Em outras palavras, queremos esclarecer a seguinte questão: como podemos saber se um conjunto de dados experimentais pode ser descrito por uma determinada distribuição de probabilidade e não por qualquer outra?

Primeiramente associamos a cada valor das variáveis aleatórias que foram geradas

numericamente, e que descrevem os passos dados por um forrageador, um valor aleatório r , no qual $r \in [0,1]$. Este conjunto de valores forma, então, um espaço amostral, que chamaremos de “empírico”, por se tratar de um espaço amostral que tem a intenção de simular um conjunto de dados obtido experimentalmente.

Desse modo, o espaço amostral “empírico” representará uma amostra constituída com os melhores valores medidos. Geramos o espaço amostral “empírico” para a estratégia de busca $\mu = 1,5$. Além disso, geramos, também, o espaço amostral para a estratégia $\mu = 1,5$, sem os erros associados às variáveis, que chamaremos de espaço amostral de referência. Este espaço amostral, tem a intenção de simular a amostra constituída pelos valores verdadeiros.

Então, realizamos o teste de Kolmogorov-Smirnov comparando os espaços amostrais, o “empírico” com o de referência, o empírico com o espaço amostral da distribuição combinada por uma soma de duas estratégias e, por fim, comparando os espaços amostrais, de referência e o combinado por meio de um soma. Em seguida, duplicamos e quadruplicamos a influência do ruído sobre o espaço amostral da distribuição de Lévy “empírica”, com o fim de analisar a influência da amplitude do erro nas comparações entre os espaços amostrais.

A figura 5.6 mostra essas comparações. Podemos observar a dificuldade em se distinguir processos de Lévy, nesse caso, de distinguir um processo de Lévy simples de um processo de Lévy combinado. A linha em preto, exibe o resultado do teste K-S entre os espaços amostrais das distribuições empírica e de referência. Como nenhum dos dois espaços amostrais depende do parâmetro ω , a maior distância D entre as duas distribuições acumuladas de probabilidade é sempre constante. Dos itens (a) à (c), vemos que à medida que o valor do ruído aumenta, a distância D entre a distribuição acumulada empírica e de referência também cresce. Consequentemente, o nível de significância do teste, descrito pelo p -valor α , diminui.

A curva em vermelho mostra o resultado do teste de Kolmogorov-Smirnov entre as distribuições acumulada de probabilidade empírica e a distribuição soma. Ao inserir um erro aos elementos do espaço amostral que compõe a distribuição de Lévy com expoente $\mu = 1,5$, vemos que para $\omega = 0,5; 0,6$ e $0,7$, os testes K-S realizados entre os espaços amostrais da distribuição empírica e a distribuição soma, exibem os mesmos resultados dos testes realizados sobre os espaços amostrais da distribuição empírica e de referência.

Isso ocorre porque a inserção do ruído “privilegia” valores menores do espaço amostral, tornando-os maiores. Passos maiores do espaço amostral não sofrem significativa influência do ruído. Do ponto de vista prático, isso significa que, no item (a), os valores da distribuição soma se assemelham à distribuição empírica e de referência quando o forrageador divide a sua estratégia de busca na qual, de 50% à 70% da sua estratégia está próxima do regime balístico, e 50% à 30%, é uma estratégia que otimiza a busca.

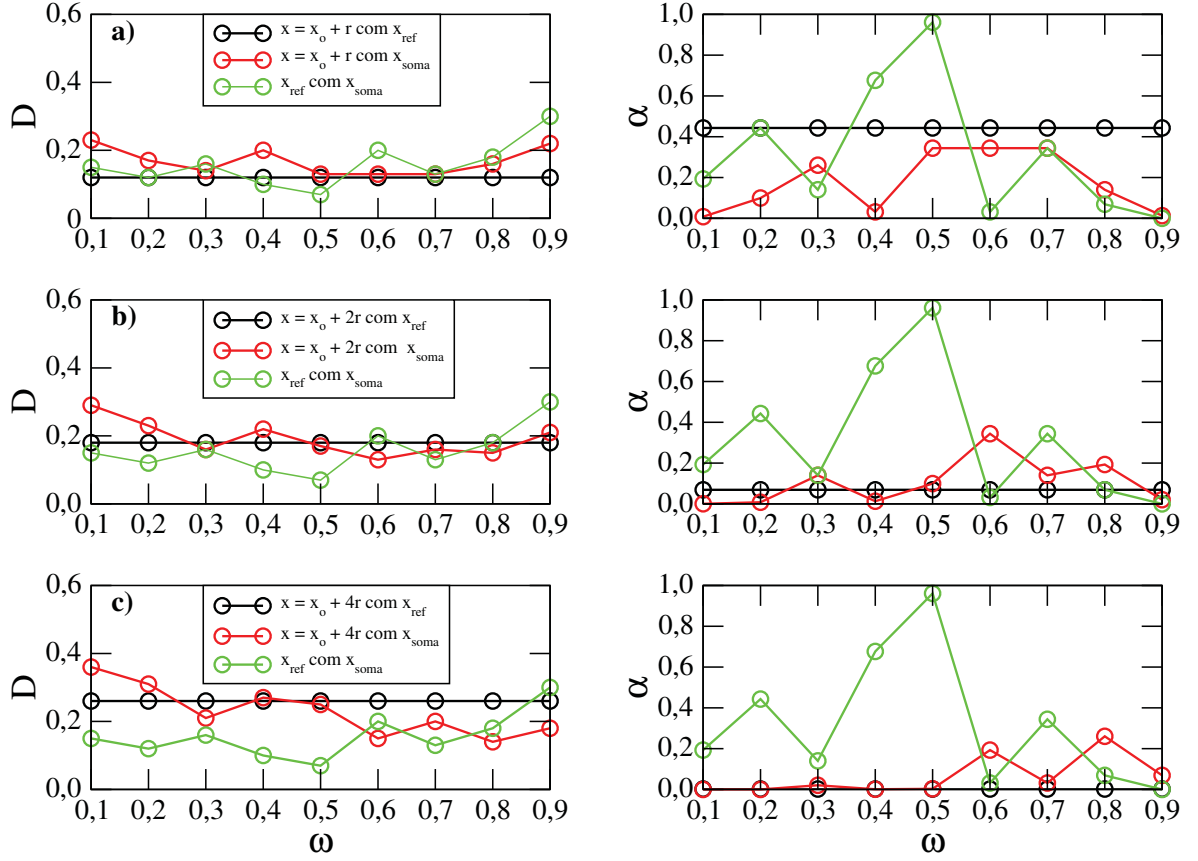


Figura 5.6 – Estatística de Kolmogorov-Smirnov para três distribuições de probabilidades. À esquerda, as diferenças absolutas entre as distribuições de probabilidades acumuladas em função do peso estatístico ω . Nos itens de (a) à (c), a curva em preto descreve a variação de D para uma distribuição de Lévy cuja às variáveis aleatórias, foram associados um ruído randômico (distribuição “empírica”) com uma distribuição de probabilidade isenta desse ruído (distribuição referência). A curva em vermelho expressa a estatística K-S entre a distribuição “empírica” e distribuição combinada. A curva em verde, por fim, mostra a estatística entre a distribuição de Lévy isenta de ruído com a distribuição de Lévy combinada. A presença de ruídos associados aos dados torna difícil a distinção da estratégia de busca adotada pelo buscador. À direita, os respectivos valores de α em função de ω .

Quando o valor do ruído é quadruplicado, conforme mostrado no item (c), o valor de D entre a distribuição acumulada empírica e de referência aumenta e coincide com resultado do teste K-S entre a distribuição acumulada empírica e soma, para valores de $\omega = 0,4$ e $0,5$. No entanto os níveis de significância do teste são baixos para ambos os casos.

A curva em verde mostra o resultado do teste K-S entre as distribuições acumulada de probabilidade para o espaço amostral de referência e da soma. É fácil ver que a curva em verde exhibe o menor valor de D e o maior valor de α evidenciando que a hipótese nula de que os dois espaços amostrais da distribuição de referência e da distribuição soma derivam da mesma população.

Vale ressaltar que o valor do ruído foi associado de forma absoluta às variáveis aleatórias, isto é, todos os elementos que constituem o espaço amostral da distribuição de

probabilidade “empírica” receberam um acréscimo aleatório r (ou múltiplo deste) em seu valor. Diferente, pois, é associar um erro que é uma porcentagem do valor de cada um dos elementos do espaço amostral.

De maneira diferente ao caso apresentado anteriormente, isso não mais privilegiaria os tamanhos de passos maiores mais do que os menores de forma global, porque cada valor de passo receberia uma porcentagem aleatória do seu próprio valor. O primeiro caso representaria um erro randômico, enquanto que, o segundo caso, representaria um erro sistemático.

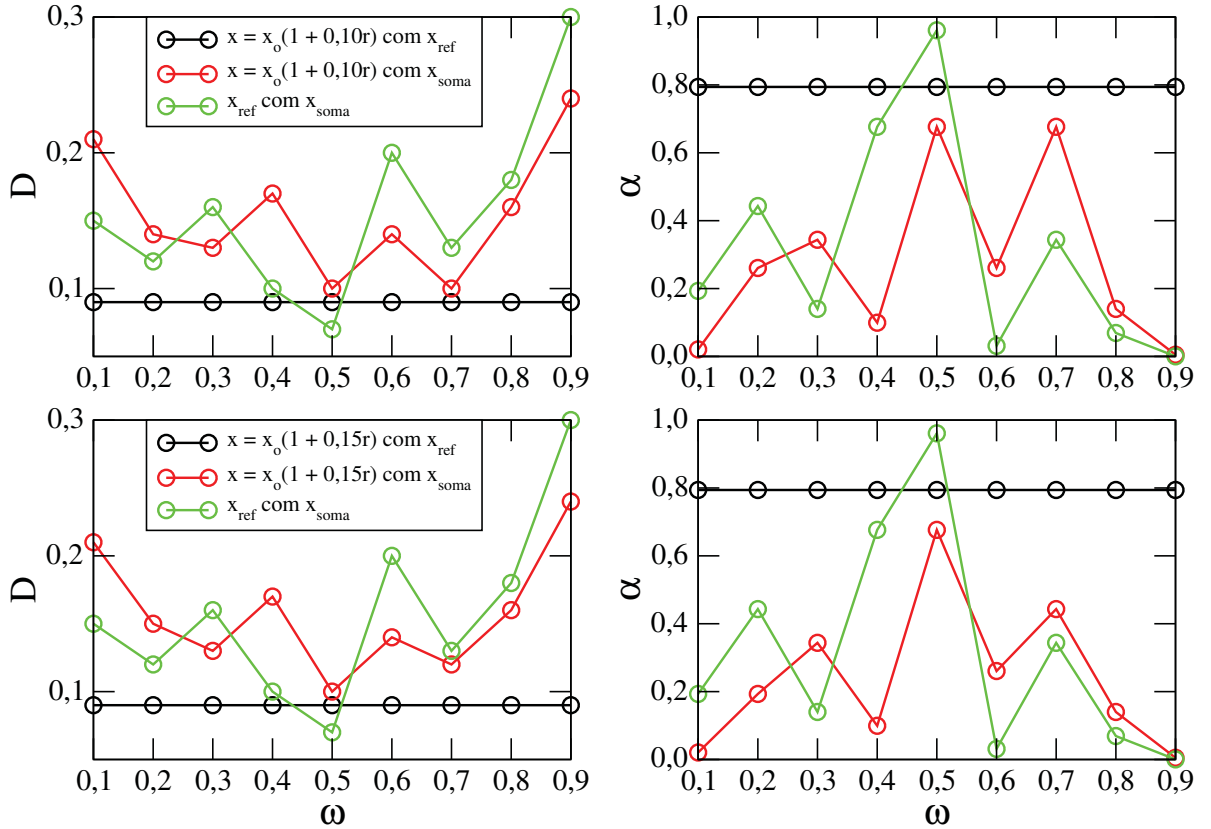


Figura 5.7 – Teste de Kolmogorov-Smirnov comparando os espaços amostrais das três distribuições de probabilidades: “empírica”, de referência e combinada. Na curva em vermelho, vemos que a adição de um pequeno erro percentual já torna difícil distinguir se o espaço amostral de distribuição “empírica” e de referência pertencem a populações diferentes para $\omega = 0,5$.

As figuras 5.7 e 5.8 mostram a estatística de Kolmogorov-Smirnov realizada entre as três distribuições de probabilidades já mencionadas anteriormente e presentes na figura 5.6. No entanto, o ruído inserido em cada um dos elementos do espaço amostral da distribuição “empírica”, segue agora, a equação: $x = x_o(1 + pr)$, em que p representa a porcentagem do valor do elemento do espaço amostral adicionada a ele próprio e r é a variável aleatória que pertence ao intervalo $\in [0,1]$.

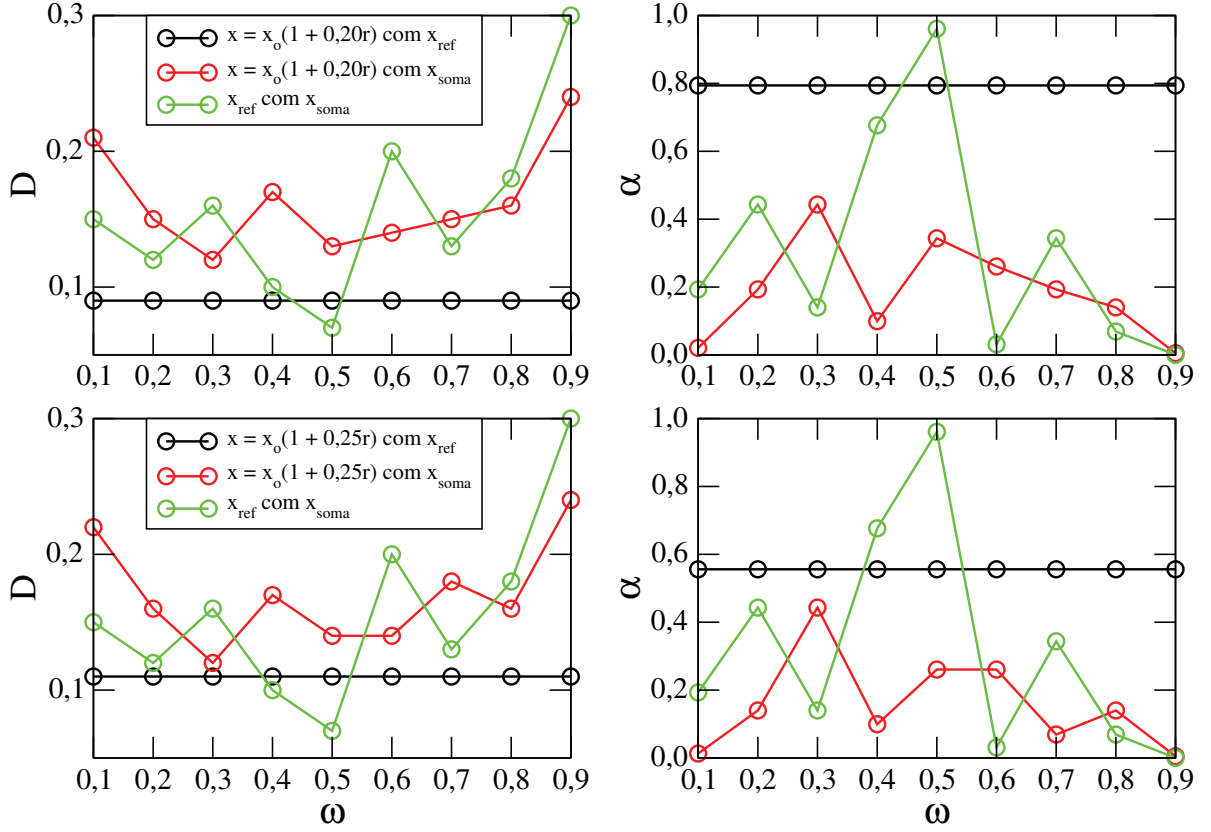


Figura 5.8 – Estatística de Kolmogorov-Smirnov para três diferentes distribuições de probabilidades e um erro percentual de 20% e 25% associado a cada elemento do espaço amostral que compõe a distribuição de probabilidade “empírica”. O erro percentual faz com que diferença absoluta entre as distribuições acumuladas de probabilidade “empírica” e de referência aumente. Para este tipo de incerteza, o teste K-S mostra que é mais provável que o espaço amostral da distribuição de referência pertença a mesma população que o espaço amostral da “empírica”, do que a distribuição soma.

Na figura 5.7, para $p = 0,1$, vemos uma concordância entre a curva em preto e a curva em vermelho, para $\omega = 0,5$. À medida que o erro percentual sobre os valores aumenta, vemos que as curvas divergem em seu valor de D na região de interesse, isto é, ω próximo de 0,5. Quando o erro percentual é de 25%, vemos que o valor de D para curva em preto aumenta, mostrando uma divergência entre a distribuição acumulada empírica e de referência. No entanto, para esse tipo de incerteza associada ao valores do espaço amostral, a curva em preto ainda exibe o melhor valor de D , indicando que é mais provável que os espaços amostrais das distribuições “empírica” e referência pertençam à mesma população.

Por fim, associamos uma flutuação a cada um dos elementos que constituem o espaço amostral de nossa distribuição de probabilidade “empírica”. Associamos a flutuação a cada elemento de acordo com a equação $x = x_o(1 \pm \delta r)$, em que δ , é novamente um percentual do elemento que constitui o espaço amostral da distribuição de probabilidade “empírica” e r é uma variável aleatória que, agora, $r \in [-1, +1]$. Dessa forma, à cada elemento desse espaço amostral é somado ou diminuído uma porcentagem aleatória de seu

valor de acordo com o valor de δ .

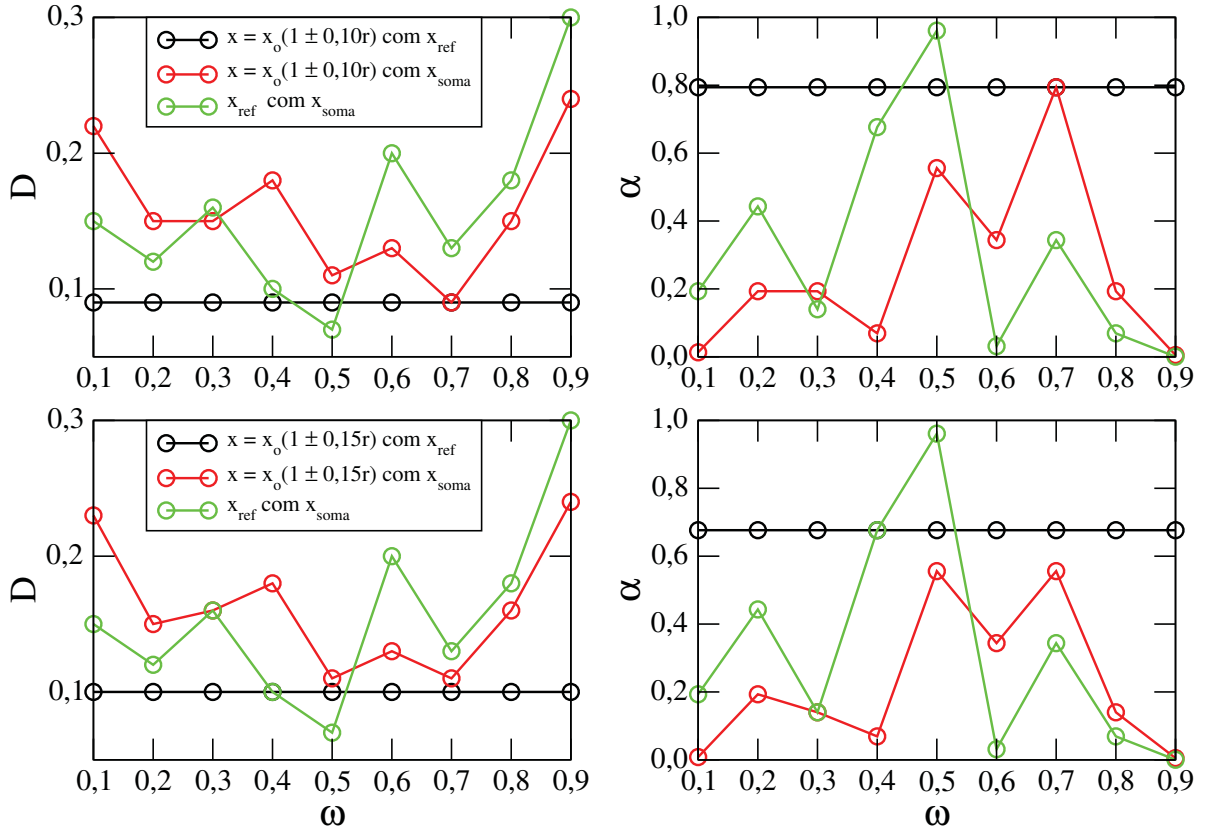


Figura 5.9 – Teste de Kolmogorov-Smirnov comparando os espaços amostrais das três distribuições de probabilidade. À distribuição empírica foi associado uma incerteza aleatória de 10% e 15%. Nota-se que uma incerteza associada de 10% dificulta distinguir se os espaços amostrais, das distribuições de referência e da soma, pertencem a diferentes populações para $\omega = 0,7$. À direita, os p – valores para a estatística de Kolmogorov-Smirnov.

As figuras 5.9 e 5.11 mostram os resultados do teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov entre as distribuições “empírica”, com a presença da incerteza, de referência (sem a incerteza) e a combinada. Pode-se notar que conforme a incerteza aumenta torna-se gradualmente difícil dizer se os espaços amostrais das distribuições de probabilidade pertencem a populações diferentes para determinados valores de ω . De acordo com a figura 5.9, para uma incerteza aleatória de 10% os espaços amostrais das distribuições de referência e soma derivam da mesma população que o espaço amostral da distribuição empírica, para o valor de $\omega = 0,7$.

Mostramos na figura 5.10, as distribuições de probabilidade acumulada da figura 5.9, em que $0,4 \leq \omega \leq 0,7$, e uma incerteza de 10% é associada as variáveis aleatórias que compõem a distribuição “empírica” de probabilidade. Observamos que as distribuições de probabilidade “empírica”, de referência e a combinada, coincidem sobre o mesmo ponto para $\omega = 0,5$ e $0,7$, mostrando que para estes valores de ω , com uma incerteza de 10% associadas aos valores do espaço amostral, as amostras podem pertencer a mesma população

e, consequentemente, serem descritas pela mesma distribuição de probabilidade.

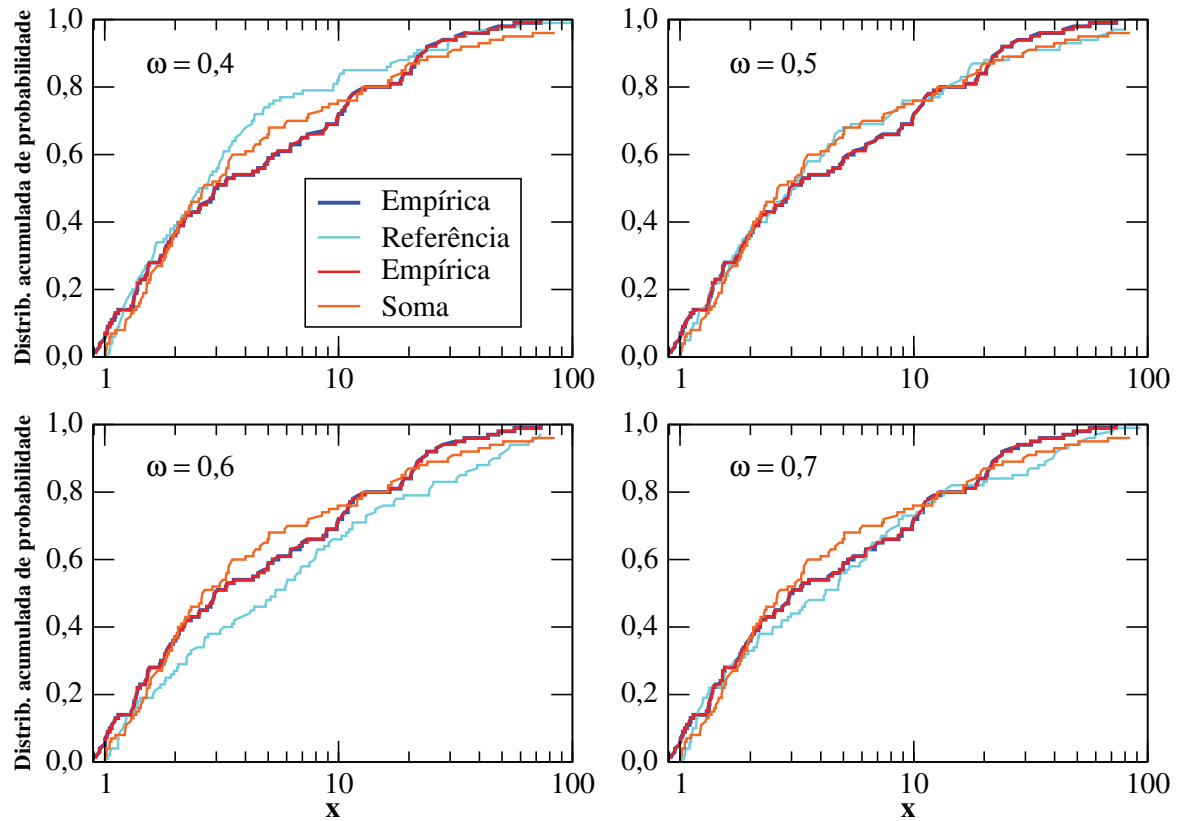


Figura 5.10 – Distribuição acumulada de probabilidade para quatro diferentes valores de ω e uma incerteza de 10% associada a distribuição de probabilidade “empírica”, conforme a figura 5.9. As distribuições de probabilidade acumulada coincidem no mesmo ponto para $\omega = 0,7$ mostrando que nesse ponto, as três distribuições mostram a mesma diferença absoluta entre suas maiores distâncias. As variáveis independentes estão em escala logarítmica para melhor visualização das curvas, uma vez que a distribuição de probabilidade acumulada tem a propriedade de ser invariante por escala na variável independente.

Vemos na figura 5.11, que à medida que a incerteza associada às variáveis aleatórias (0,20 e 0,25) aumenta, as curvas que representam o teste de Kolmogorov-Smirnov e que comparam a distribuição “empírica” com a de referência e a distribuição “empírica” com a combinada, se ajustam em mais pontos, tornando-se mais semelhantes.

Isto é, para uma incerteza de 20% do valor da variável aleatória, as curvas que representam o teste K-S para a distribuição “empírica” e de referência e a distribuição “empírica” e a combinada, começam a coincidir no intervalo $0,5 \leq \omega \leq 0,7$, enquanto que para uma incerteza de 25%, no mesmo intervalo $0,5 \leq \omega \leq 0,7$, a coincidência é completa.

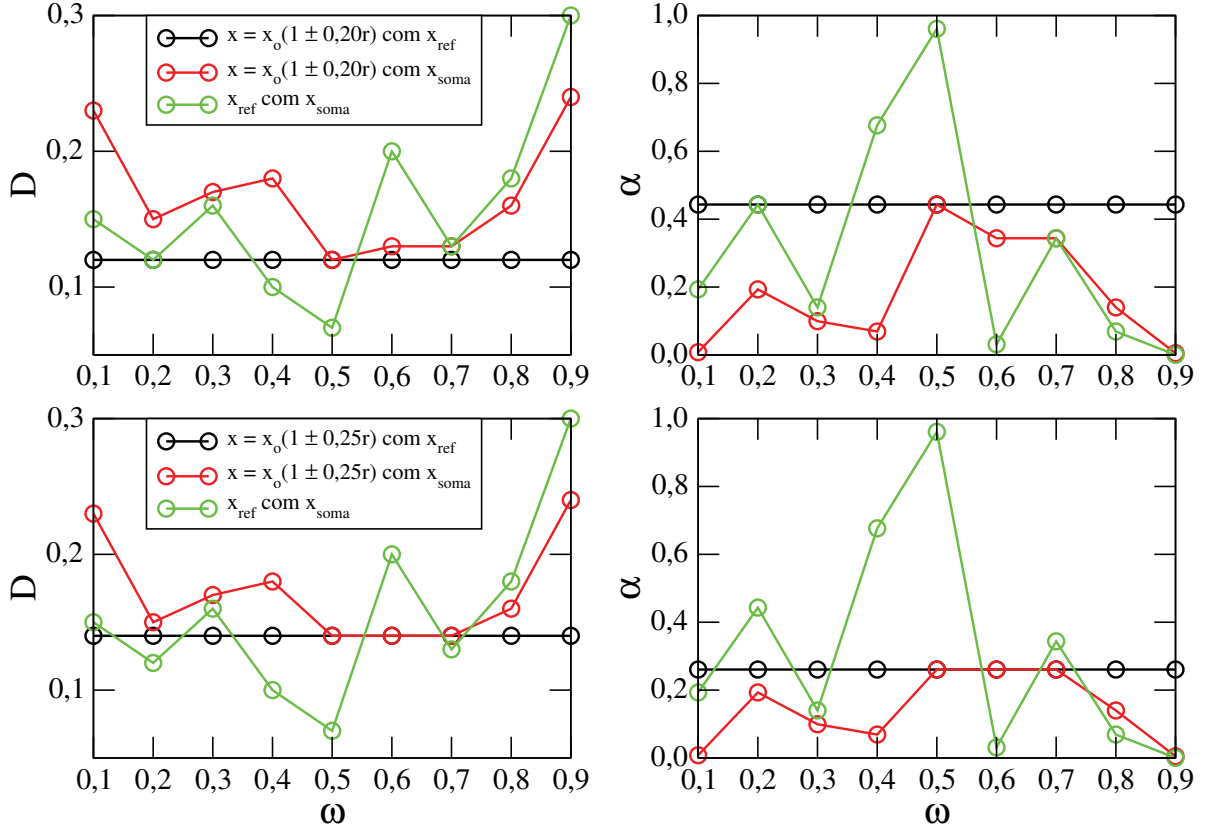


Figura 5.11 – Teste de Kolmogorov-Smirnov entre as três distribuições de probabilidade: “empírica”, referência e combinada. A cada elemento do espaço amostral da distribuição de probabilidade “empírica”, é associada uma incerteza de 20% (topo) e 25% (base) do valor do próprio elemento do espaço amostral. Conforme a incerteza aumenta, a curva em preto, que representa a comparação entre a distribuição “empírica” e a de referência, e a curva em vermelho, que representa a comparação entre a distribuição “empírica” e a combinada por uma soma, se ajustam sobre a mesma curva.

Observamos, também, que a menor distância entre as distribuições acumulada de probabilidade, isto é, os valores de D , ocorrem para o valor de $\omega = 0,5$. Isso evidencia que a estratégia que melhor descreve o processo de busca da distribuição de referência, é uma soma de duas estratégias de busca em que 50% corresponde a estratégia balística e 50% corresponde a uma estratégia de busca que otimiza o encontro de alvos.

Plotamos abaixo, na figura 5.12, as distribuições de probabilidade acumulada para o intervalo $0,4 \leq \omega \leq 0,7$, e incerteza aleatória de 25%, de acordo com a figura 5.11. A figura 5.12 mostra que, para cada valor de ω , as maiores diferenças absolutas entre a distribuição de probabilidade acumulada “empírica” e a de referência bem como a distribuição acumulada combinada por uma soma e a distribuição acumulada “empírica”, se ajustam aproximadamente sobre a mesma curva.

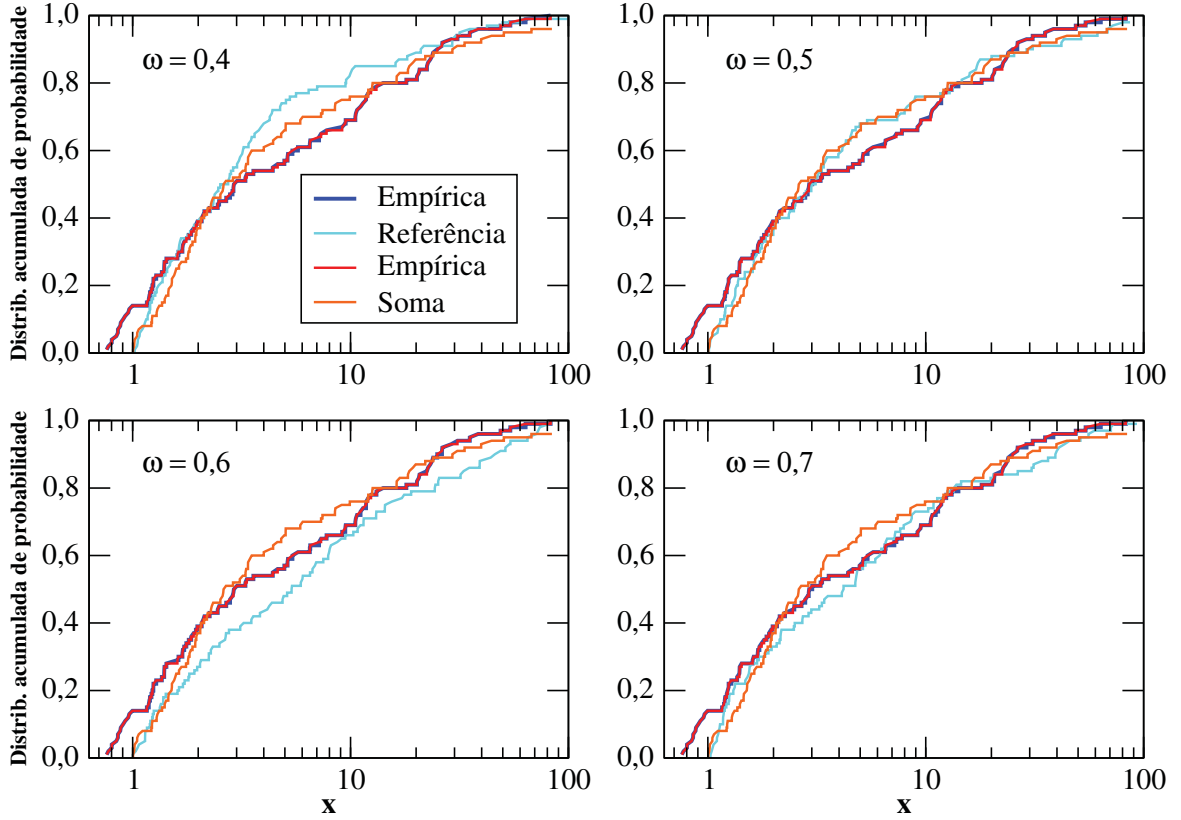


Figura 5.12 – Distribuições acumuladas de probabilidades dos três espaços amostrais: “empírico” (azul e vermelho), de referência (ciano) e combinada por uma soma (em laranja). A figura mostra que, para cada valor de ω , o valor de D , que é a maior diferença absoluta entre as distribuições acumuladas de probabilidade, são iguais.

A análise discutida nesta seção nos possibilita entender, de forma mais ampla, a influência dos erros associados as medidas experimentais. Percebemos por meio da inserção de três tipos de erros que, mesmo sabendo *a priori*, a qual distribuição de probabilidades pertencem os dados empíricos, em nosso caso, a estratégia de busca $\mu = 1,5$, é difícil distinguir qual é a estratégia de busca realizada na presença de erros associados aos conjuntos de dados que representam os passos dados pelo buscador.

A mesma dificuldade emerge quando sabemos como o buscador divide a sua estratégia de busca. Para uma combinação de estratégias de busca em que o buscador divide metade da sua estratégia de busca em uma estratégia do tipo balística e a outra metade em uma estratégia de busca que otimiza o encontro de alvos em regiões com baixa densidade destes, o espaço amostral em que os diferentes erros foram associados a uma distribuição de Lévy com expoente $\mu = 1,5$, chamado de espaço amostral “empírico”, se assemelha ao espaço amostral que é descrito pela distribuição de probabilidade combinada por uma soma de duas distribuições de probabilidade com estratégias de busca diferentes.

Até aqui, nossa análise se restringiu a descrever uma estratégia de busca com um expoente bem definido por meio de uma soma de duas distribuições. Na próxima seção, mostramos os resultados obtidos da investigação de uma estratégia de busca bem definida

ser descrita por uma soma de três distribuições de probabilidade. O intuito do estudo que será mostrado na próxima seção é generalizar a combinação de estratégias de busca e entender quais são as estratégias de busca mais relevantes na descrição de uma estratégia com expoente bem definido.

5.4 Estatística de Kolmogorov-Smirnov Aplicada a uma Distribuição Combinada por uma Soma de Três Estratégias de Busca

Nas seções anteriores mostramos que uma estratégia de busca descrita por uma distribuição de Lévy com um expoente bem definido, pode ser descrita por uma conveniente soma de duas distribuições de Lévy. Aplicamos o método da transformada inversa para obtermos a expressão para os passos de um buscador que realiza este processo de busca de Lévy combinado. Agora, faremos a mesma análise para uma distribuição de probabilidade combinada por uma soma de três estratégias de busca. Estamos interessados em saber, sob quais circunstâncias, a igualdade $P_{ref}(\ell) = P_c(\ell)$ se verifica. Isto é, se

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu - 1}{r_v^{1-\mu} - \ell_{max}^{1-\mu}} \right) \ell^{-\mu} &= \left(\frac{\mu_1 - 1}{r_v^{1-\mu_1} - \ell_{max}^{1-\mu_1}} \right) \omega_1 \ell^{-\mu_1} + \left(\frac{\mu_2 - 1}{r_v^{1-\mu_2} - \ell_{max}^{1-\mu_2}} \right) \omega_2 \ell^{-\mu_2} + \\ &+ \left(\frac{\mu_3 - 1}{r_v^{1-\mu_3} - \ell_{max}^{1-\mu_3}} \right) \omega_3 \ell^{-\mu_3}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

em que $P_{ref}(\ell)$ é a distribuição de probabilidade de referência (com $\mu = 1,5$), $P_c(\ell)$ é distribuição de Lévy combinada e ω_n com $n = \{1,2,3\}$, são os pesos estatísticos que descrevem a frequência com que o buscador realiza uma determinada estratégia de busca. Além disso, os expoentes que descrevem as estratégias de busca são, agora, $\mu_1 = 1,1$, $\mu_2 = 2,0$ e $\mu_3 = 3,0$ e $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$.

Em suma, queremos investigar quais são as frequências das estratégias de busca que podem descrever uma estratégia com um expoente bem definido. Sendo a distribuição de Lévy combinada, agora, uma distribuição de probabilidades que é caracterizada por uma soma de três diferentes estratégias de busca, uma estratégia utilizada para percorrer grandes distâncias (balística), a qual o forrageador pode utilizar para voltar à região de onde é nativo, outra utilizada para otimizar a eficiência de busca e uma terceira, que o buscador utiliza para permanecer no ambiente em que se encontra, realizando o reconhecimento da região.

Aplicamos, então, o método da transformada inversa ao lado direito da equação eq. 1.18, e obtemos, desse modo, a expressão para o tamanho dos passos do caminhante

$$\ell = \left[\frac{\alpha_1 \ell^{\mu_3-\mu_1} + \alpha_2 \ell^{\mu_3-\mu_2} + \alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - F_c(\ell)} \right]^{\frac{1}{\mu_3-1}}, \quad (5.3)$$

onde, os α_n são funções dos pesos estatísticos ω_n , expressos por

$$\alpha_n = \frac{\omega_n}{r_v^{1-\mu_n} - \ell_{máx}^{1-\mu_n}}, \quad (5.4)$$

com $0,1 \leq \omega_n \leq 0,9$ e $\sum_{n=1}^3 \omega_n = 1$, em que $n = \{1,2,3\}$. Fazendo $\omega_3 = 1 - (\omega_1 + \omega_2)$, vinculamos os pesos estatístico e, desse modo, vinculamos a frequência da estratégia de busca Browniana as estratégias de busca balística e ótima, tornando-a estatisticamente dependente das outras estratégias. Ou seja, a frequência com que o forrageador realiza uma estratégia de busca com expoente $\mu = 3,0$, dependerá da frequência com que este realiza as outra duas estratégias.

A Eq. 5.3 guarda uma certa semelhança com a Eq. 2.94, o que poderia levar a pensar que, a Eq. 5.3, é uma generalização daquela. Entretanto, vale ressaltar que, para o caso em que $\omega_3 = 0$, e consequentemente $\alpha_3 = 0$, isto é, o regime de busca sem a estratégia Browniana, a Eq. 5.3, não incorre na Eq. 2.94, uma vez que, naquela, ℓ é função das três estratégias de busca ao passo que, nesta, é função de duas estratégias, somente.

E mais: o expoente da Eq. 5.3, é regido pela estratégia de busca Browniana, enquanto que na Eq. 2.94, é regido pela estratégia ótima. Isso faz com que o tamanho dos passos dado pelo buscador, tenha um comportamento de acordo com a raiz quadrada de ℓ para uma combinação de três estratégias, ou seja, $\ell \sim \ell^{1/2}$, ao passo que o comportamento para os passos da Eq. 2.94, é linear, isto é, $\ell \sim \ell^1$.

O teste de Kolmogorov-Smirnov foi, então, realizado para comparar se os espaços amostrais da distribuição de probabilidade de referência e da distribuição combinada por uma soma de três estratégias de busca, pertencem à mesma população. Dessa forma, os valores de ω_1 e ω_2 , foram variados no intervalo $\in [0,1; 0,9]$ e, para cada par (ω_1, ω_2) dentro deste intervalo, foi gerado o espaço amostral da distribuição combinada dada pela Eq. 5.3, e, em seguida, calculada a estatística K-S sobre a distribuição de referência.

Convém mencionar um fato importante na realização do teste. Variando os parâmetros (ω_1, ω_2) , encontraremos pares de parâmetros que anularão ω_3 . Isso poderia levar a uma superestimação nos valores do teste, isto é, levaria-nos a obter valores menores de D , quando na realidade, não são. Para estes casos, então, foi utilizada a Eq. 2.94 para a realização do teste de Kolmogorov-Smirnov. Para os demais pares de parâmetros foi utilizada a Eq. 5.3.

A figura 5.13, mostra o plano dos parâmetros (ω_1, ω_2) em que cada ponto do plano representa o cálculo do valor absoluto da maior distância, D , entre as distribuições de probabilidade acumulada de referência e combinada. A figura está representada na forma de uma matriz em que, cada quadriculado da figura 5.13, representa um par dos parâmetros (ω_1, ω_2) com o qual foi calculado o valor de D . A região em cinza representa o que podemos chamar de “zona proibida”, por se tratar do conjunto de parâmetros que violam a condição de normalização dos pesos estatísticos, isto é, pares de (ω_1, ω_2) nos quais, $\sum_{n=1}^3 \omega_n \neq 1$.

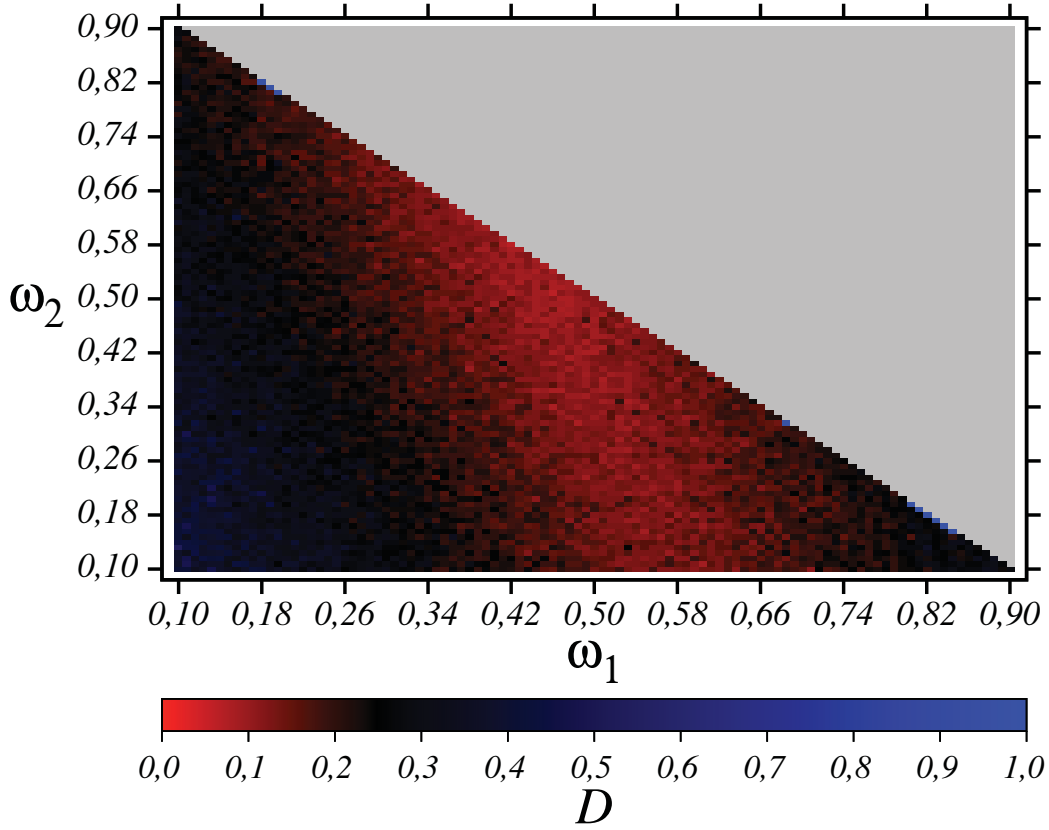


Figura 5.13 – Espaço de parâmetros (ω_1, ω_2) para a estatística de Kolmogorov-Smirnov. Os intervalos de ω_1 e ω_2 considerados, formam uma matriz 100×100 . Para cada ponto (ω_1, ω_2) do espaço de parâmetros, a cor representa o valor de D . A região central da figura reúne os melhores valores da estatística K-S e mostra que a frequência da estratégia de busca Browniana é baixa ou mesmo, nula. A região em cinza representa o conjunto de pontos (ω_1, ω_2) , em que a condição de normalização é violada.

Podemos ver que os menores valores de D , se encontram na região próxima à $\omega_1 = \omega_2 = 0,5$, corroborando, assim, o fato do buscador dividir a frequência de busca 50%, em uma estratégia balística e os outros 50%, na estratégia que otimiza o encontro de alvos. Além disso, a figura 5.13, evidencia que a frequência com que ocorre a estratégia de busca Browniana é sempre baixa, quando não, nula. Por exemplo, se tomarmos o par $\omega_1 = 0,58$ e $\omega_2 = 0,26$ cujo valor de D é próximo de 0,1, a princípio baixo, tem-se um nível de significância baixo, isto é, $\alpha \approx 0,25$, associado a este valor de D , conforme mostrado na figura 5.14, que iremos discutir a seguir.

Lembrando que um baixo nível de significância implica em refutarmos a hipótese nula de que os dois espaços amostrais pertencem à mesma população, isto é, o par $\omega_1 = 0,58$ e $\omega_2 = 0,26$, que corresponde a uma frequência de 24% associado a estratégia de busca Browniana, tem uma probabilidade de 25% do espaço amostral da distribuição de probabilidade de referência e combinada pertencerem à mesma população.

Para cada valor de D , contido na figura 5.13, foi calculado o seu nível de significância, α . O resultado é mostrado na figura 5.14. De modo semelhante ao espaço de parâmetros

para os valores de D , a figura 5.14, é uma matriz em que, para cada intersecção (ω_1, ω_2) , a cor indica o valor para o nível de significância.

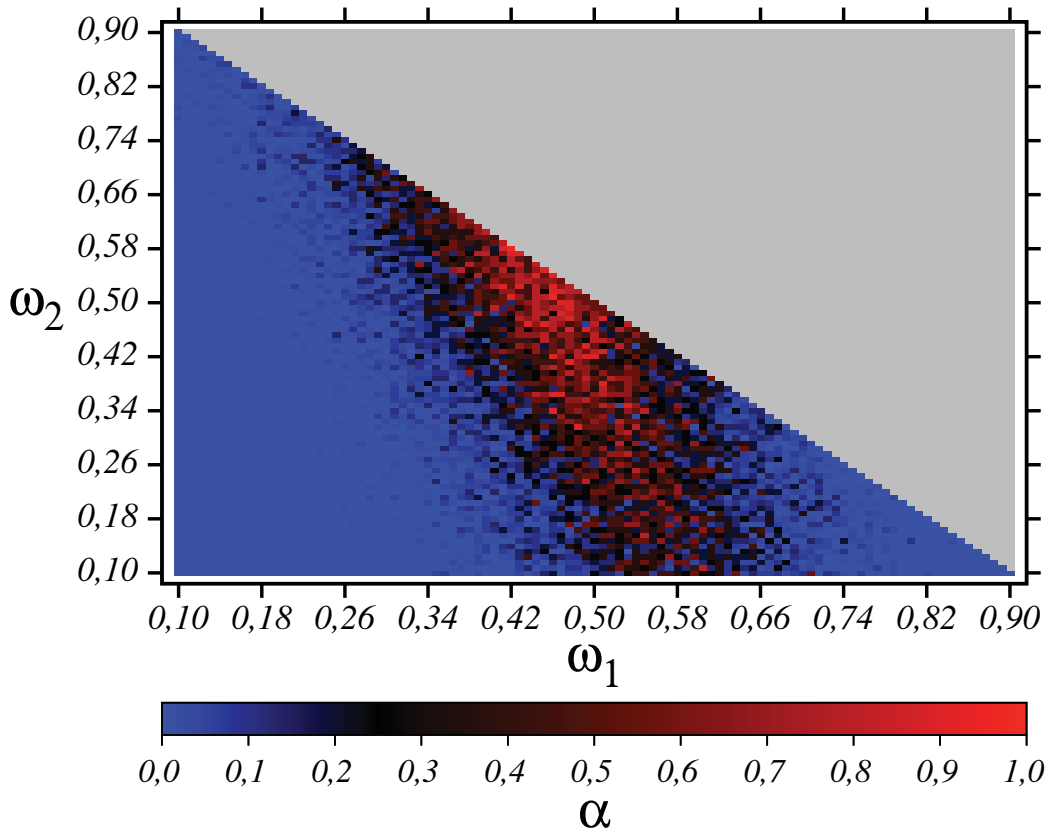


Figura 5.14 – Espaço de parâmetros (ω_1, ω_2) para os níveis de significância dos valores de D , presentes na figura 5.13. A região central da figura reúne os melhores níveis de significância do teste K-S, mostrando que a frequência com que o buscador realiza uma estratégia Browniana é nula.

Vemos, por meio do nível de significância, que nem todos os valores de D , contidos na região próxima à $(\omega_1, \omega_2) = (0,5; 0,5)$, nos permitem aceitar a hipótese nula de que os dois espaços amostrais comparados por meio do teste, pertencem a mesma população. Constatamos também que grande número de pares (ω_1, ω_2) , que possuem valores de D próximos à região central da matriz, possuem valores para o nível de significância, entre 20% e 40%. Ao passo que grande parte dos pontos com os maiores níveis de significância se encontram na região central da figura 5.14, isto é, na região em que $(\omega_1, \omega_2) = (0,5; 0,5)$

Desse modo, por meio da figura 5.14, podemos concluir quais são os pares (ω_1, ω_2) , que mostram uma maior probabilidade de a hipótese nula estar correta, isto é, para quais frequências de estratégias de busca combinada por uma soma de três estratégias, nos levam a tomar a hipótese nula como correta. E por hipótese nula correta, queremos dizer, a hipótese que afirma que os espaços amostrais das duas distribuições de probabilidade comparadas, provém da mesma população.

Em suma, os valores de α , evidenciam quais os pontos do espaço de parâmetros da figura 5.13, descrevem melhor a igualdade expressa pela Eq. 5.3. Além disso, é possível ver que os valores de D que possuem maior significância são aqueles em que a frequência da estratégia de busca Browniana é nula, sugerindo que a combinação que melhor descreve uma estratégia de Lévy com um expoente bem caracterizado, é aquela representada por uma soma de duas estratégias de busca cuja frequência das estratégias é dividida de forma aproximadamente igual, ou seja, 50% uma estratégia balística e 50% uma estratégia que visa otimizar o encontro de alvos.

Até aqui, tratamos de gerar numericamente um espaço amostral cujos elementos descrevem uma distribuição de probabilidade combinada por uma soma de duas e três estratégias de Lévy. Na próxima seção, apresentaremos um método que visa separar e identificar a qual espaço amostral pertencem as variáveis desse espaço amostral combinado. Isto é, dado um espaço amostral composto por variáveis que descrevem duas estratégias de Lévy, por exemplo $\mu_1 = 1.1$ e $\mu_2 = 2.0$, desenvolvemos um método que visa separar essas variáveis aleatórias em seus respectivos espaços amostrais de origem.

5.5 Método de Separação de Variáveis Aleatórias e o Teste de Kolmogorov-Smirnov

Nesta seção, discorreremos sobre um método desenvolvido para responder a uma questão básica e importante: dado um conjunto de variáveis aleatórias que sabemos, *a priori*, serem descritas por duas diferentes distribuições de probabilidade, de que modo podemos separá-las em seus devidos espaços amostrais? Em outras palavras, como podemos saber a qual distribuição de probabilidade (dentre duas previamente conhecidas), pertence um determinado conjunto de variáveis aleatórias.

Para este fim, geramos numericamente, por meio do método da transformada inversa, os espaços amostrais das respectivas distribuições de probabilidade com estratégia de busca $\mu_1 = 1.1$ e $\mu_2 = 2.0$, que serão, agora, considerados os espaços amostrais de referência, $\Omega_{\mu_1}^{ref}$ e $\Omega_{\mu_2}^{ref}$. Em seguida, geramos o espaço amostral da distribuição de probabilidade combinada por uma soma de duas estratégias de Lévy e, então, de acordo com uma probabilidade k , a variável é colocada no espaço amostral que pertence a distribuição referente a estratégia de busca μ_1 , e com probabilidade $1 - k$, é colocada no espaço amostral da distribuição de probabilidade descrita pela estratégia de busca, μ_2 .

A estes espaços amostrais gerados e separados com uma probabilidade k , daremos o nome de espaços amostrais empíricos $\Omega_{\mu_1}^{emp}$ e $\Omega_{\mu_2}^{emp}$, referentes as estratégias de busca μ_1 e μ_2 , respectivamente. Então, iteramos várias vezes, uma certa quantidade de trocas entre os espaços amostrais $\Omega_{\mu_1}^{emp}$ e $\Omega_{\mu_2}^{emp}$, calculando as respectivas distribuições acumuladas de probabilidade e, assim, o valor de D e α por meio do teste de Kolmogorov-Smirnov.

Estes valores calculados tornam-se os valores de referência, D_{ref} e α_{ref} . É determi-

nado um número de vezes em que serão realizadas as trocas entre os espaços amostrais $\Omega_{\mu_1}^{emp}$ e $\Omega_{\mu_2}^{emp}$. Nesse caso, o número inicial de trocas que foi considerado, é igual ao número de variáveis aleatórias que compõe o espaço amostral da distribuição combinada que foi gerada numericamente, isto é, são realizadas cem trocas.

Portanto, a cada cem trocas aleatórias, o teste K-S é realizado entre os espaços amostrais empírico e de referência para as respectivas estratégias de busca μ_1 e μ_2 , e um novo valor de D e α é calculado em cada teste. Estes valores, são comparados com os valores de D_{ref} e α_{ref} e, então, se os valores calculados forem menores que os de referência, os espaços amostrais $\Omega_{\mu_1}^{emp}$ e $\Omega_{\mu_2}^{emp}$, são atualizados e os valores de D e α tornam-se os novos valores de referência. Quando os valores de referência são atualizados o número de trocas entre as variáveis dos espaços amostrais reduz, então, pela metade e uma nova sequência de trocas se inicia. Enumeramos abaixo, o algoritmo seguido para a implementação do método.

1. São gerados $\Omega_{\mu_1}^{ref}$ e $\Omega_{\mu_2}^{ref}$ que são os espaços amostrais de referência das distribuições de Lévy, que seguem as estratégias de busca $\mu_1 = 1,1$ e $\mu_2 = 2,0$, respectivamente;
2. É gerado o espaço amostral da distribuição de probabilidade combinada por uma soma de duas estratégias de Lévy, dada pela Eq. 2.94.
3. As variáveis geradas são escolhidas aleatoriamente, de acordo com uma probabilidade k , a pertencerem ao espaço amostral empírico $\Omega_{\mu_1}^{emp}$ e com probabilidade $1 - k$ a pertencerem ao espaço amostral $\Omega_{\mu_2}^{emp}$;
4. Realiza-se iterações na ordem de 10^{12} vezes e, a cada iteração, realiza-se cem trocas aleatórias entre as variáveis dos espaços amostrais $\Omega_{\mu_1}^{emp}$ e $\Omega_{\mu_2}^{emp}$;
5. A cada cem trocas aleatórias o teste K-S é realizado, e é verificado se os valores de D e α diminuíram por meio das trocas e, então, se diminuíram, os valores de referência são atualizados.
6. A cada atualização dos valores de referência são atualizados os espaços amostrais $\Omega_{\mu_1}^{emp}$ e $\Omega_{\mu_2}^{emp}$ e o número de trocas entre os espaços amostrais reduz pela metade;

A finalidade principal desse método numérico é fazer com que os espaços amostrais $\Omega_{\mu_1}^{emp}$ e $\Omega_{\mu_2}^{emp}$ pertençam, respectivamente, as mesmas populações a qual pertencem os espaços amostrais, $\Omega_{\mu_1}^{ref}$ e $\Omega_{\mu_2}^{ref}$. Como o número inicial de trocas aleatórias é relativamente alto é necessário um número alto de iterações.

5.6 Conclusões e Trabalhos Futuros

Nesse capítulo foi apresentado um estudo sobre estratégias de Lévy combinadas. Nosso objetivo foi demonstrar que uma estratégia de busca específica, nesse caso, com um expoente bem definido, $\mu = 1,5$, pode ser descrita convenientemente como uma soma

de duas estratégias de busca, uma estratégia balística $\mu = 1,1$ e a outra que otimiza a eficiência de busca $\mu = 2,0$. Para este fim, propomos uma distribuição de probabilidade que é caracterizada por uma soma de duas distribuições de Lévy e associamos a cada um dos termos da soma, um peso estatístico ω , que controla a frequência de ocorrência das estratégias de busca combinadas.

Comparamos o comportamento funcional da distribuição de probabilidade combinada com a distribuição de probabilidade de referência, e observamos que o valor do parâmetro $\omega = 0,5$ é o valor que melhor ajusta o comportamento funcional da distribuição de probabilidade combinada à distribuição de referência, fornecendo o primeiro indício de que uma estratégia de Lévy combinada pode descrever voos de Lévy.

Obtivemos numericamente a distribuição de probabilidade combinada, para diferentes valores de ω , em que $\omega \in [0,1; 0,9]$, e comparamos com a forma funcional da distribuição de probabilidade combinada, mostrando que a função da distribuição combinada e a distribuição de probabilidade combinada de Lévy, obtida numericamente, se encontram sobre a mesma curva para os diferentes valores de $\ell_{m\acute{a}x}$.

Aplicamos o método da inversão para encontrar o conjunto de dados que descreve os passos aleatórios de um caminhante de Lévy, que executa uma estratégia de busca combinada. Para uma soma de duas distribuições de Lévy, a expressão que permite encontrar o tamanho dos passos do forrageador, não é analiticamente inversível. Assim, resolvemos numericamente a Eq. 5.1, para encontrar o modulo da diferença entre a reta e a curva com uma precisão ϵ em que, $\epsilon \sim 10^{-5}$.

O método da transformada inversa foi também aplicado para obter o espaço amostral que é descrito por um distribuição de probabilidade com estratégia de busca $\mu = 1,5$ e empregamos o teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov para verificar se os dois espaços amostrais pertencem à mesma população. Para $\ell_{m\acute{a}x} = 100$, o teste estatístico confirmou, não só a hipótese de que os dois espaços amostrais pertencem a mesma população, como também confirmou que o forrageador divide sua estratégia de busca igualmente, atribuindo 50% para a estratégia de busca balística, e 50% para a estratégia que otimiza a eficiência. Para valores maiores de $\ell_{m\acute{a}x}$, observa-se a influência do tamanho do ambiente na estratégia de busca. Vemos que para valores de $\ell_{m\acute{a}x} = 1000$ e 10000 , a estratégia de busca é 40% balística e 60% para otimizar a eficiência de busca.

Observamos a dificuldade em afirmar que um certo conjunto de dados pertence a uma determinada estratégia de Lévy. Por meio de inserções de diferentes tipos de erros associados aos dados gerados numericamente, vimos que os espaços amostrais das distribuições de referência e combinada podem pertencer à mesma população, sendo muito difícil dizer a qual espaço amostral uma determinada variável aleatória pertence e, conseqüentemente, qual distribuição de probabilidade a descreve. Tal análise teve por finalidade, simular a presença de erros associados aos dados experimentais, tanto o erro propagado quanto o sistemático, e as suas conseqüências na descrição estatística de fenômenos em biologia.

Investigamos se uma estratégia de busca combinada por meio de uma soma de três específicas estratégias, balística, ótima e Browniana podem descrever o padrão descrito por uma estratégia com um expoente bem definido. Para tal, realizamos o teste de Kolmogorov-Smirnov variando os parâmetros que descrevem a frequência das estratégias de busca balística e ótima, sob as quais a estratégia de busca Browniana estava vinculada. O plano de parâmetros, gerado por meio dos resultados dos testes K-S, mostrou que a combinação que descreve melhor uma estratégia de busca simples, isto é, definida por uma única estratégia, é aquela combinada por uma soma de duas estratégias.

Observou-se, também, que uma combinação de três estratégias de busca pode descrever uma estratégia simples, mas com baixo nível de significância em relação a outra estratégia combinada. Isto é, em uma estratégia combinada por uma soma de três distribuições de probabilidade, não possível ter tanta certeza de que os espaços amostrais das distribuições de referência e combinada, provém da mesma população.

Por fim, desenvolvemos um método de separação de variáveis aleatórias, que tem por finalidade, separar em seus respectivos espaços amostrais de origem, dois conjuntos de variáveis aleatórias que estavam misturadas em um mesmo espaço amostral mas, que sabemos, *a priori*, quais são as duas distribuições de probabilidade deste conjunto. Desejamos, futuramente, aplicar estes métodos aos dados experimentais presentes na literatura [?], para verificar a credibilidade de nosso modelo.

CONCLUSÕES

The truth is that the limit of human faculties often imposes upon us, as a condition of advance, temporary departure from the standard of strict method. The work of the discoverer may thus precede that of the systematizer; and the division of labour will have its advantage here as well as in other fields.

Lord Rayleigh, Nature, Vol. 43. (1890), p. 26.

Nesta tese foram discutidos três diferentes problemas ligados à caracterização do movimento em sistemas biológicos. Os problemas foram estudados utilizando diferentes métodos de abordagens relacionados à física estatística, mecânica clássica e caminhadas aleatórias. No desenvolvimento desta tese diferentes técnicas foram utilizadas a cada um dos problemas tais como, formulações analíticas, simulações numéricas, modelagem computacional e análise de dados.

No capítulo 2, estudamos e caracterizamos o transiente em um ambiente de busca que possuía uma distribuição dinâmica de alvos. Apresentamos uma formulação analítica para a caracterização da dinâmica de um processo de busca aleatória descrito por estratégias de Lévy. Por meio de dois processos que regulam a dinâmica do número de alvos disponíveis no ambiente, e de uma métrica que descreve a variação temporal da distância típica média entre os alvos, obtivemos um conjunto de equações diferenciais contínuas que, uma vez resolvidas, descrevem o comportamento das grandezas que caracterizam o sistema durante o transiente de um sistema complexo e fora do equilíbrio. As grandezas que caracterizam o sistema tais como, o número de alvos no ambiente, número de alvos que o buscador encontra e a sua eficiência de busca, são bem caracterizadas à medida que o expoente $\mu \rightarrow 1$.

No capítulo 3, focamos em um método para modelar e simular computacionalmente

a motilidade da associação *Chaetoceros-Vorticella*. A motilidade da associação foi modelada de acordo com as regras de um mapa estocástico bidimensional de tempo discreto. Baseamos as simulações computacionais utilizando uma premissa básica de que, a associação ajusta seu movimento por meio da retração de seus pedúnculos sempre que não há partículas de alimentos suficientes para cada uma das *Vorticella* sp. que constitui a associação. Nossas simulações, comparadas aos dados empíricos, forneceram evidências de que a premissa é verdadeira. Consideramos esta contribuição importante, uma vez que na literatura pouco se sabe acerca dos mecanismos envolvidos no movimento desse protozoário.

No capítulo 4, utilizamos inferência estatística não paramétrica para estudar estratégias de Lévy combinadas. Este estudo teve a finalidade de aprofundar o entendimento acerca do movimento de duas espécies de pássaros: uma nativa do norte do oceano atlântico, a *C. borealis*, e a outra nativa do norte do mediterrâneo, a *C. diomedae*. Nosso objetivo foi demonstrar que uma estratégia de busca, com um expoente bem definido pode ser descrita convenientemente como uma soma de duas estratégias de busca: uma estratégia balística $\mu = 1,1$ e a outra que otimiza a eficiência de busca $\mu = 2,0$. Aplicamos o teste não paramétrico de Kolmogorov-Smirnov para comparar se os dois conjuntos de dados pertenciam à mesma população. Mostramos que quando o forrageador divide suas estratégias de busca em aproximadamente 50% a estratégia combinada descreve satisfatoriamente a estratégia com expoente $\mu = 1,5$.

REFERÊNCIAS

- [1] K. Pearson. The problem of the random walk. *Nature*, 72(294):1476–4687, 1905. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 35.
- [2] F. R. S. Brown, M. R. S. E. Hon and R.I. Acad. XXVII. a brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *The Philosophical Magazine*, 4(21):161–173, 1828. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 35.
- [3] A. Einstein. On the motion of small particles suspended in liquids at rest required by the molecular-kinetic theory of heat. *Annalen der Physik*, 17:549–560, 1905. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 35.
- [4] G. M. Viswanathan, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo, H. E. Stanley. *The Physics of Foraging: An Introduction to Random Searches and Biological Encounters*. Cambridge University, 1a edition, 2011. Citado 7 vezes nas páginas 18, 42, 55, 60, 88, 89 e 122.
- [5] E. A. Codling, M. J. Plank and S. Benhamou. Random walk models in biology. *Journal of The Royal Society Interface*, 5(25):813–834, 2008. Citado na página 18.
- [6] H. C. Berg. *Random Walk in Biology*. Princeton University Press, United Kingdom, expanded edition, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 38.
- [7] R. N. Mantegna and H. E. Stanley. Stochastic process with ultraslow convergence to a gaussian: The truncated lévy flight. *Phys. Rev. Lett.*, 73:2946–2949, Nov 1994. Citado 3 vezes nas páginas 18, 42 e 60.
- [8] M. Tyran-Kamińska. Convergence to lévy stable processes under some weak dependence conditions. *Stochastic Processes and their Applications*, 120(9):1629–1650, 2010. Citado na página 19.
- [9] S. J. Janke. Recurrent sets for transient Lévy processes with bounded kernels. *The Annals of Probability*, 13(4):1204–1218, 1985. Citado na página 19.

- [10] M. C. Santos, E. P. Raposo, G. M. Viswanathan and M. G. E. da Luz. Can collective searches profit from lévy walk strategies? *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(43):434017, oct 2009. Citado na página 19.
- [11] M. E. Wosniack, M. C. Santos, E. P. Raposo, M. Viswanathan and M. G. E. da Luz. The evolutionary origins of lévy walk foraging. *PLOS Computational Biology*, 13, 10 2017. Citado 3 vezes nas páginas 19, 97 e 123.
- [12] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 1. John Wiley & Sons, USA, 1957. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- [13] A. N. Kolmogorov. *Foundations of the Theory of Probability*. Chelsea Publishing Company, New York, 2a edition, 1956. Citado na página 23.
- [14] M. N. Magalhães e A. C. P. de Lima. *Noções de Probabilidade e Estatística*. EdUSP, São Paulo, 1a edition, 2013. Citado na página 24.
- [15] G. V. Belle, L. D. Fisher, P. J. Heagerty, and T. Lumley. *Biostatistics: A Methodology for the Health Sciences*. John Wiley & Sons, USA, 2a edition, 2004. Citado na página 26.
- [16] W. J. Conover. *Practical Nonparametric Statistics*. John Wiley, USA, 3a edition, 1999. Citado na página 27.
- [17] T. Tomé and M. J. de Oliveira. *Stochastic Dynamics and Irreversibility*. Springer, Switzerland, 1a edition, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- [18] Z. Peyton and Jr. Z. Peebles. *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*. McGraw-Hill, New York, 4a edition, 2001. Citado na página 29.
- [19] P. S. M. de Laplace. *Théorie Analytique Des Probabilités*. Gauthier Villar, Paris, 2a edition, 1820. Citado na página 31.
- [20] J. E. C. Alves. Teorema central do limite: Compreendendo e aplicando. Master's thesis, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, 2016. Citado na página 31.
- [21] M. E. Wosniack. *A Statistical Mechanics Approach to Random Searches*. PhD thesis, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 31, 35, 56 e 123.
- [22] J. Y. Le Boudec, D. McDonald, and J. Munding. A generic mean field convergence result for systems of interacting objects. In *Fourth international conference on the quantitative evaluation of systems (QEST 2007)*, pages 3–18. IEEE, 2007. Citado na página 33.

- [23] J. Theis, G. Graebner, G. Buchwald, J. Maruhn, W. Greiner, H. Stöcker and J. Polonyi. Phase transition of the nucleon-antinucleon plasma in a relativistic mean-field theory. *Physical Review D*, 28(9):2286, 1983. Citado na página 33.
- [24] A. Banerjee and M. P. Singh. Ground-state properties of a trapped bose gas beyond the mean-field approximation. *Physical Review A*, 64(6):063604, 2001. Citado na página 33.
- [25] M. Opper, D. Saad. *Advanced mean field methods: Theory and practice*. MIT press, 2001. Citado na página 33.
- [26] D. Chandler. *Introduction to modern statistical*. 1987. Citado na página 33.
- [27] E. Ising. Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, 31(1):253–258, 1925. Citado na página 33.
- [28] S. Blundell. *Magnetism in condensed matter*. American Association of Physics Teachers, 2003. Citado na página 33.
- [29] M. Opper, O. Winther et al. From naive mean field theory to the tap equations. *Advanced mean field methods: theory and practice*, pages 7–20, 2001. Citado na página 33.
- [30] J. Bernoulli. *Ars conjectandi, opus posthumum*. Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallicè scripta de ludo pilae reticularis. 1713. Citado na página 35.
- [31] F. R. S. Lord Rayleigh. XII On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 10(60):73–78, 1880. Citado na página 35.
- [32] M. von Smoluchowski. Zur kinetischen theorie der brownischen molekularbewegung und der suspensionen. *Annalen der Physik*, 326(14):756–780, 1906. Citado na página 35.
- [33] J. M. Emlen. The role of time and energy in food preference. *The American Naturalist*, 100(916):611–617, 1966. Citado na página 36.
- [34] R. H. MacArthur and E. R. Pianka. On optimal use of a patchy environment. *The American Naturalist*, 100(916):603–609, 1966. Citado na página 36.
- [35] C. L. Faustino. *Transições de Fase em Buscas Aleatórias no Regime de Baixas Densidades em Alvos*. PhD thesis, Universidade Federal do Paraná, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.
- [36] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. John Wiley & Sons, USA, 3a edition, 1957. Citado 3 vezes nas páginas 39, 41 e 42.

- [37] C. D. Paulino, D. Pestana, J. Branco, J. Singer, L. Barroso e W. Bussab. *Glossário Inglês-Português de Estatística*, volume 2. Associação Brasileira de Estatística, Brasil, 2a edition, 2010. Citado na página 39.
- [38] V. V. Uchaikin and V. M. Zolotarev. *Chance and Stability: Stable Distributions and their Applications*. Princeton University Press, Utrech, Netherlands, 1999. Citado na página 39.
- [39] R. N. Mantegna and H. E. Stanley. *An Introduction to Econophysics. Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University, UK, 1a edition, 1999. Citado na página 42.
- [40] G. M. Viswanathan, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo and H. E. Stanley. Optimizing the success of random searches. *Nature*, 401:911–914, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 43, 55, 61 e 88.
- [41] M. C. Santos. *Modelo Geral de Busca Aleatória Markoviana: Soluções no Limite Determinístico*. PhD thesis, Universidade Federal do Paraná <http://flavio@hoggar.fisica.ufpr.br/home/posgrad/flavio/tese-tex/tese.texná>, Curitiba, 2012. Citado na página 45.
- [42] S. Siegel. *Nonparametric Statistics for the behavioral sciences*. McGraw-Hill, USA, 1a edition, 1956. Citado na página 46.
- [43] K. Kramer, M. Koehler, C. E. Fiore and M. G. E da Luz. Emergence of distinct spatial patterns in cellular automata with inertia: A phase transition-like behavior. *Entropy*, 19(3):102, 2017. Citado na página 50.
- [44] R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands. The feynman lectures on physics; vol. i. *American Journal of Physics*, 33(9):750–752, 1965. Citado na página 50.
- [45] D. S. Lemons and A. Gythiel. Paul langevin’s 1908 paper “on the theory of brownian motion”[“sur la théorie du mouvement brownien,” cr acad. sci.(paris) 146, 530–533 (1908)]. *American Journal of Physics*, 65(11):1079–1081, 1997. Citado na página 52.
- [46] C. D. Alstad, H. S. Isbin, N. R. Amundson, and J. P. Silvers. Transient behavior of single-phase natural-circulation loop systems. *AIChE Journal*, 1(4):417–425. Citado na página 54.
- [47] S Panchev. Analytical study of a nonlinear dynamical system. *Comptes Rendus de l’Academie Bulgare des Sciences*, 57(10):10–19, 2004. Citado na página 54.
- [48] Jakub Spiechowicz, Jerzy Łuczka, and Peter Hänggi. Transient anomalous diffusion in periodic systems: ergodicity, symmetry breaking and velocity relaxation. *Scientific reports*, 6:30948, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.

- [49] Jacek Grela. What drives transient behavior in complex systems? *Physical Review E*, 96(2):022316, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.
- [50] Tim Kittel, Jobst Heitzig, Kevin Webster, and Jürgen Kurths. Timing of transients: quantifying reaching times and transient behavior in complex systems. *New Journal of Physics*, 19(8):083005, 2017. Citado na página 54.
- [51] Vito Latora, Andrea Rapisarda, and Stefano Ruffo. Superdiffusion and out-of-equilibrium chaotic dynamics with many degrees of freedoms. *Physical Review Letters*, 83(11):2104, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.
- [52] Sergey Kravtsov, Noriyuki Sugiyama, and Anastasios A Tsonis. Transient behavior in the lorenz model. *Nonlinear Processes in Geophysics Discussions*, 1(2):1905–1917, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.
- [53] Shuji Ishihara, Mikiya Otsuji, and Atsushi Mochizuki. Transient and steady state of mass-conserved reaction-diffusion systems. *Physical Review E*, 75(1):015203, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.
- [54] Alan Hastings. Transients: the key to long-term ecological understanding? *Trends in Ecology & Evolution*, 19(1):39–45, 2004. Citado na página 55.
- [55] Alan Hastings, Karen C Abbott, Kim Cuddington, Tessa Francis, Gabriel Gellner, Ying-Cheng Lai, Andrew Morozov, Sergei Petrovskii, Katherine Scranton, and Mary Lou Zeeman. Transient phenomena in ecology. *Science*, 361(6406), 2018. Citado na página 55.
- [56] SA Marshall. Steady-state and transient behaviour of control systems. In *Introduction to Control Theory*, pages 73–104. Springer, 1978. Citado na página 55.
- [57] Gaole Dai and Jiping Huang. A transient regime for transforming thermal convection: Cloaking, concentrating, and rotating creeping flow and heat flux. *Journal of Applied Physics*, 124(23):235103, 2018. Citado na página 55.
- [58] Byeong-Il Jang, Moo Hwan Kim, and Gyoodong Jeun. A study on the steady-state and transient behavior of natural circulation in rex-10. *Nuclear Technology*, 177(2):203–216, 2012. Citado na página 55.
- [59] Vassilis Glenis, Valentina Pinamonti, Jim W Hall, and Chris G Kilsby. A transient stochastic weather generator incorporating climate model uncertainty. *Advances in Water Resources*, 85:14–26, 2015. Citado na página 55.
- [60] Inbal Hecht, David A Kessler, and Herbert Levine. Transient localized patterns in noise-driven reaction-diffusion systems. *Physical review letters*, 104(15):158301, 2010. Citado na página 55.

- [61] Grace Campagnola, Kanti Nepal, Bryce W Schroder, Olve B Peersen, and Diego Krapf. Superdiffusive motion of membrane-targeting c2 domains. *Scientific reports*, 5(1):1–10, 2015. Citado na página 55.
- [62] A Wacker, S Bose, and E Schöll. Transient spatio-temporal chaos in a reaction-diffusion model. *EPL (Europhysics Letters)*, 31(5-6):257, 1995. Citado na página 55.
- [63] Micheal F Shlesinger, George M Zaslavsky, and Uriel Frisch. Lévy flights and related topics in physics. 1995. Citado na página 55.
- [64] G Zumofen, J Klafter, and MF Shlesinger. Breakdown of ovchinnikov-zeldovich segregation in the $a + b \rightarrow 0$ reaction under lévy mixing. *Physical review letters*, 77(13):2830, 1996. Citado na página 55.
- [65] Dirk Brockmann and Lars Hufnagel. Front propagation in reaction-superdiffusion dynamics: Taming lévy flights with fluctuations. *Physical review letters*, 98(17):178301, 2007. Citado na página 55.
- [66] CL Faustino, LR Da Silva, MGE Da Luz, EP Raposo, and GM Viswanathan. Search dynamics at the edge of extinction: anomalous diffusion as a critical survival state. *EPL (Europhysics Letters)*, 77(3):30002, 2007. Citado na página 55.
- [67] Sean Carnaffan and Reiichiro Kawai. Analytic model for transient anomalous diffusion with highly persistent correlations. *Physical Review E*, 99(6):062120, 2019. Citado na página 55.
- [68] David Applebaum. Lévy processes-from probability to finance and quantum groups. *Notices of the AMS*, 51(11):1336–1347, 2004. Citado na página 55.
- [69] Nikola Sandrić. On transience of lévy-type processes. *Stochastics*, 88(7):1012–1040, 2016. Citado na página 55.
- [70] G. C. Hays, T. Bastian, T. K. Doyle, S. Fossette, A. C. Gleiss, M. B. Gravenor, V. J. Hobson, N. E. Humphries, M. K. S. Lilley, N. G. Pade and D. W. Sims. High activity and lévy searches: jellyfish can search the water column like fish. *Proceedings: Biological Sciences*, 279(1728):465–473, 2012. Citado na página 55.
- [71] M. C. Santos, E. P. Raposo, G. M. Viswanathan and M. G. E. da Luz. Optimal random searches os reversible targets: Crossover from superdiffusive to ballistic random walks. *Europhysics Letters*, 67:734–740, 2004. Citado na página 55.
- [72] A. S. Ferreira, E. P. Raposo, G. M. Viswanathan and M. G. E. da Luz. The influence of the environment on lévy random search efficiency: Fractality and memory effects. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 391(11):3234 – 3246, 2012. Citado na página 55.

- [73] S. A. S. López. Efeitos da capacidade de detecção e da densidade de alvos no problema de busca aleatória. Master's thesis, Univerdade Federal do Paraná, Curitiba, 2011. Citado na página 55.
- [74] M. E. Wosniack, M. C. Santos, M. R. Pie, M. C. M. Marques, E. P. Raposo, G. M. Viswanathan and M. G. E. da Luz. Unveiling a mechanism for species decline in fragmented habitats: fragmentation induced reduction in encounter rates. *Journal of The Royal Society Interface*, 11(91):20130887, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 97.
- [75] I. Volkov, J. R. Banavar and A. Maritan. Organization of ecosystems in the vicinity of a novel phase transition. *Phys. Rev. Lett.*, 92:218703, 2004. Citado na página 56.
- [76] V. Kozlov, S. Vakulenko and U. Wennergren. Biodiversity, extinctions, and evolution of ecosystems with shared resources. *Phys. Rev. E*, 95:032413, 2017. Citado na página 56.
- [77] M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky and U. Frisch. *Lévy Flights and Related Topics in Physics*. Springer Verlag, Nice, 1a edition, 1994. Citado na página 60.
- [78] G. M. Viswanathan, E. P. Raposo, F. Bartumeus, J. Catalan and M. G. E. da Luz. Necessary criterion for distinguishing true superdiffusion from correlated random walk processes. *Phys. Rev. E*, 72:011111, 2005. Citado na página 61.
- [79] F. Bartumeus, J. Catalan, G. M. Viswanathan, P. Raposo and M. G. E. da Luz. The influence of turning angles on the success of non-oriented animal searches. *Journal of Theoretical Biology*, 252:43–55, 2008. Citado na página 61.
- [80] S. A. Sotelo-López, M. C. Santos, E. P. Raposo, G. M. Viswanathan and M. G. E. da Luz. Conditions under which a superdiffusive random-search strategy is necessary. *Phys. Rev. E*, 86:031133, Sep 2012. Citado na página 61.
- [81] M. E. Wosniack, M. C. Santos, E. P. Raposo, G. M. Viswanathan and M. G. E. da Luz. Robustness of optimal random searches in fragmented environments. *Phys. Rev. E*, 91:052119, May 2015. Citado na página 61.
- [82] M. C. Santos, E. P. Raposo, G. M. Viswanathan and M. G. E. da Luz. Optimal random searches of revisitable targets: Crossover from superdiffusive to ballistic random walks. *Europhys. Lett.*, 67(5):734–740, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 89.
- [83] E. P. Raposo, S. V. Buldyrev, M. G. E. da Luz, M. C. Santos, H. E. Stanley, G. M. Viswanathan. Dynamical robustness of lévy search strategies. *Phys. Rev. Lett.*, 91:240601, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 72 e 89.

- [84] R. M. R. Barclay and R. M. Brigham. Constraints on optimal foraging: a field test of prey discrimination by echolocating insectivorous bats. *Animal Behaviour*, 48(5):1013 – 1021, 1994. Citado na página 72.
- [85] F. Bartumeus, P. Fernández, M. G. E. da Luz, J. Catalan, R. V. Solé and S. A. Levin. Superdiffusion and encounter rates in diluted, low dimensional worlds. *The European Physical Journal Special Topics*, 157(1):157–166, 2008. Citado na página 72.
- [86] G. Hollinger, S. Singh, J. Djugash and A. Kehagias. Efficient multi-robot search for a moving target. *Int. J. Robot. Reser*, 28:201, 2009. Citado na página 72.
- [87] C. L. Faustino, M. L. Lyra, E. P. Raposo, G. M. Viswanathan and M. G. E. da Luz. The universality class of random searches in critically scarce environments. *EPL*, 97(5):50005, 2012. Citado na página 72.
- [88] E. Kagan and I. B. Gal. *Search and Foraging: Individual Motion and Swarm Dynamics*. CRC Press, Boca Raton-FL, 1a edition, 2015. Citado na página 72.
- [89] J. A. Nunez, D. I. Singham and M. P. Atkinson. A particle filter approach to estimating target location using brownian bridges. *Journal of the Operational Research Society*, 0(0):1–17, 2019. Citado na página 72.
- [90] C. L. Faustino, L. R. da Silva, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo and G. M. Viswanathan. Search dynamics at the edge of extinction: Anomalous diffusion as a critical survival state. *Europhysics Letters (EPL)*, 77(3):30002, 2007. Citado na página 72.
- [91] F. Bartumeus, J. Catalan, U. L. Fulco, M. L. Lyra and G. M. Viswanathan. Optimizing the encounter rate in biological interactions: Lévy versus brownian strategies. *Phys. Rev. Lett.*, 88:097901, Feb 2002. Citado na página 88.
- [92] E. P. Raposo, S. V. Buldyrev, M. G. E. da Luz, M. C. Santos, E. Stanley and G. M. Viswanathan. Dynamical robustness of lévy search strategies. *Phys. Rev. Lett.*, 91:240601, Dec 2003. Citado na página 88.
- [93] K. Zhao, R. Jurdak, J. Liu, D. Westcott, B. Kusy, H. P. Sommer and A. McKeown. Optimal lévy-flight foraging in a finite landscape. *Journal of The Royal Society Interface*, 12(104):20141158, 2015. Citado na página 88.
- [94] G. Volpe and G. Volpe. The topography of the environment alters the optimal search strategy for active particles. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 114(43):11350–11355, 2017. Citado na página 89.
- [95] M. G. E. da Luz and B. K. Cheng. Quantum-mechanical results for a free particle inside a box with general boundary conditions. *Phys. Rev. A*, 51:1811–1819, 1995. Citado na página 89.

- [96] R. Nathan, W. M. Getz, E. Revilla, M. Holyoak, R. Kadmon, D. Saltz, P. E. Smouse. A movement ecology paradigm for unifying organismal movement research. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 105(49):19052–19059, 2008. Citado na página 96.
- [97] V. Méndez, D. Campos, and F. Bartumeus. *Stochastic foundations in movement ecology*. Springer, 2016. Citado na página 96.
- [98] H. C. Crenshaw. A new look at locomotion in microorganisms: rotating and translating. *American Zoologist*, 36(6):608–618, 1996. Citado na página 96.
- [99] A. E. Douglas. *Symbiotic interactions*. Number 577.85 D733s. Oxon, GB: Oxford University Press, 1994. Citado na página 97.
- [100] K. A. Peacock. Symbiosis in ecology and evolution. In *Philosophy of Ecology*, pages 219–250. Elsevier, 2011. Citado na página 97.
- [101] N. A. Moran. Symbiosis. *Current Biology*, 16(20):R866 – R871, 2006. Citado na página 97.
- [102] E. Akçay. Population structure reduces benefits from partner choice in mutualistic symbiosis. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, 284(1850):20162317, 2017. Citado na página 97.
- [103] F. N. Egerton. History of ecological sciences, part 52: Symbiosis studies. the bulletin of the ecological society of america. *Bulletin of the Ecological Society of America*, 96:80–139, 2015. Citado na página 97.
- [104] H. F. Howe and J. Smallwood. Ecology of seed dispersal. *Annual review of ecology and systematics*, 13(1):201–228, 1982. Citado na página 97.
- [105] M. H. Egerer, E. C. Fricke, H. S. Rogers. Seed dispersal as an ecosystem service: frugivore loss leads to decline of a socially valued plant, capsicum frutescens. *Ecological Applications*, 28(3):655–667, 2018. Citado na página 97.
- [106] D. H. S. Richardson, D. J. Hill and D. C. Smith. The role of the alga in determining the pattern of carbohydrate movement between lichen symbionts. *New Phytologist*, 67(3):469–486, 1968. Citado na página 97.
- [107] P. Bonfante and A. Genre. Mechanisms underlying beneficial plant–fungus interactions in mycorrhizal symbiosis. *Nature communications*, 1(1):1–11, 2010. Citado na página 97.
- [108] Z-Y. Du, K. Zienkiewicz, N. V. Pol, N. E. Ostrom, C. Benning, G. M. Bonito. Algal-fungal symbiosis leads to photosynthetic mycelium. *eLife*, 8, 2019. Citado na página 97.

- [109] E. Natan and Y. Vortman. The symbiotic magnetic-sensing hypothesis: do magnetotactic bacteria underlie the magnetic sensing capability of animals? *Movement ecology*, 5(1):22, 2017. Citado na página 97.
- [110] O. Zacharias. *Über periodizität, variation und verbreitung verschiedener planktonwesen in südlichen meeren*. E. Nägele, 1906. Citado na página 97.
- [111] E. E. Cupp. Marine plankton diatoms of the west coast of north america. 1943. Citado na página 97.
- [112] S. Nagasawa and A. Warren. Redescription of vorticella oceanica zacharias, 1906 (ciliophora: Peritrichia) with notes on its host, the marine planktonic diatom chaetoceros coarctatum lauder, 1864. *Hydrobiologia*, 337(1-3):27–36, 1996. Citado na página 97.
- [113] G. Sahu, A. K. Mohanty, S. Panigrahi and K. K. Satpathy. First record of association of planktonic diatom chaetoceros coarctatus lauder, 1864 with a peritrich ciliate epibiont vorticella oceanica zacharias, 1906 (ciliophora: Peritricha) from the indian ocean region. 2017. Citado na página 97.
- [114] F. Gómez, L. Wang and S. Lin. Morphology and molecular phylogeny of peritrich ciliate epibionts on pelagic diatoms: Vorticella oceanica and pseudovorticella coscinodisci sp. nov.(ciliophora, peritrichia). *Protist*, 169(2):268–279, 2018. Citado na página 97.
- [115] I. Irastorza-Azcarate, R. D. Acemel, J. J. Tena, I. Maeso, J. L. Gómez-Skarmeta and D. P. Devos. 4cin: A computational pipeline for 3d genome modeling and virtual hi-c analyses from 4c data. *PLOS Computational Biology*, 14, 2018. Citado na página 97.
- [116] C. Barton, S. Morganella, Ø. Ødegård Fougner, S. Alexander, J. Ries, T. Fitzgerald, J. Ellenberg and E. Birney. Chromotrace: Computational reconstruction of 3D chromosome configurations for super-resolution microscopy. *PLOS Computational Biology*, 14(3):1–20, 2018. Citado na página 97.
- [117] R. Melnik. *Mathematical and Computational Modeling*. Wiley, Ontario, 1a edition, 2011. Citado na página 97.
- [118] C. Li. Functions of neuronal network motifs. *Phys. Rev. E*, 78:037101, 2008. Citado na página 98.
- [119] P. Tahmasebi. Accurate modeling and evaluation of microstructures in complex materials. *Phys. Rev. E*, 97:023307, 2018. Citado na página 98.
- [120] S. K. Doddi and P. Bagchi. Three-dimensional computational modeling of multiple deformable cells flowing in microvessels. *Phys. Rev. E*, 79:046318, 2009. Citado na página 98.

- [121] O. Kononenko, C. Adolphsen, Z. Li, C.-K. Ng and C. Rivetta. 3D multiphysics modeling of superconducting cavities with a massively parallel simulation suite. *Phys. Rev. Accel. Beams*, 20:102001, 2017. Citado na página 98.
- [122] A. Ghaffarizadeh, R. Heiland, S. H. Friedman, S. M. Mumenthaler and P. Macklin. Physicell: An open source physics-based cell simulator for 3D multicellular systems. *PLOS Computational Biology*, 14, 02 2018. Citado na página 98.
- [123] R. Z. Tan and K.-H. Chiam. A computational model for how cells choose temporal or spatial sensing during chemotaxis. *PLOS Computational Biology*, 14, 03 2018. Citado na página 98.
- [124] F. Boudon, J. Chopard, O. Ali, B. Gilles, O. Hamant, A. Boudaoud, J. Traas and C. Godin. A computational framework for 3D mechanical modeling of plant morphogenesis with cellular resolution. *PLOS Computational Biology*, 11, 2015. Citado na página 98.
- [125] Y. G. B. Felipe. Motilidade da associação entre uma diatomácea cêntrica e um ciliado peritríquio e suas possíveis consequências ecológicas. Master's thesis, Univerdade de São Paulo, São Paulo, 2018. Citado na página 98.
- [126] D. E. G. Briggs and P. R. Crowther. *Palaeobiology II*. Blackwell Publishing, USA, 2a edition, 2003. Citado na página 98.
- [127] J. Sendroy and H. A. Collison. Determination of human body volume from height and weight. *Journal of Applied Physiology*, 21(1):167–172, 1966. Citado na página 100.
- [128] W. J. Pasciak and J. Gavis. Transport limitation of nutrient uptake in phytoplankton1. *Limnology and Oceanography*, 19(6):881–888, 1974. Citado na página 100.
- [129] C. S. Reynolds. *Ecology of Phytoplankton*. Cambridge, Cambridge, 1a edition, 2006. Citado na página 100.
- [130] T. D. Sauer K. T. Alligood and J. A. Yorke. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York, 1a edition, 2000. Citado na página 100.
- [131] S. Kim and S. J. Karrila. *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*. Butterworth-Heinemann, USA, 1a edition, 1991. Citado na página 101.
- [132] M. del C. Alvarez and A. L. Fuiman. Ecological performance of red drum (*sciaenops ocellatus*) larvae exposed to environmental levels of the insecticide malathion. *Environmental Toxicology and Chemistry*, 25(5):1426–1432, 2006. Citado na página 111.

- [133] H. J. Price. Swimming behavior of krill in response to algal patches: A mesocosm study. *Limnology and Oceanography*, 34(4):649–659, 1989. Citado na página 111.
- [134] S. M. Shefet, B. W. Sheldon, B. E. Farkas and K. R. Swartzel. Development of a quantitative video-based visualization method to characterize the flow behavior of food particulates in a model continuous aseptic sterilizer. *Journal of Food Process Engineering*, 22(2):141–160, 1999. Citado na página 111.
- [135] L. Seuront and P. G. Strutton. *Handbook of Scaling Methods in Aquatic Ecology: Measurements, Analysis, Simulation*. CRC Press, USA, 1a edition, 2003. Citado na página 112.
- [136] S. Benhamou. How many animals really do the lévy walk? *Ecology*, 88(8):1962–1969, 2007. Citado na página 123.
- [137] A. Reynolds. Liberating lévy walk research from the shackles of optimal foraging. *Physics of Life Reviews*, 14:59 – 83, 2015. Citado na página 123.
- [138] A. Reynolds, E. Ceccon, C. Baldauf, T. K. Medeiros and O. Miramontes. Lévy foraging patterns of rural humans. *PLOS ONE*, 13(6), 06 2018. Citado na página 123.
- [139] J. H. Vuolo. *Fundamentos da teoria de erros*. Editora Blucher, 1996. Citado na página 130.